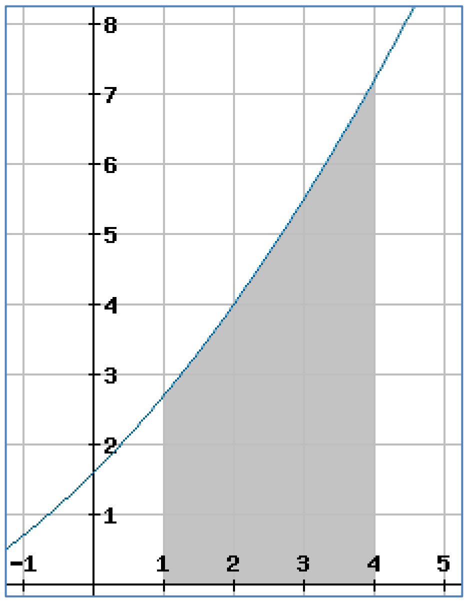
Flächenberechnung:

Aufgabe 1

$$f(x) = \frac{1}{10}x^2 + x + \frac{8}{5}$$

Bestimme den Flächeninhalt, welchen die Funktion f(x) mit der x-Achse im Intervall [1,4] einschließt.

Lösung:



Bestimmung der Nullstellen

$$f(x) = \frac{1}{10}x^2 + x + \frac{8}{5}$$

$$\frac{1}{10}x^2 + x + \frac{8}{5} = 0 \qquad | \cdot 10$$

$$x^2 + 10x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -8, \; x_2 = -2$$

$$\Rightarrow N_1(-8|0), \; N_2(-2|0)$$

=> Keine Nullstelle im Intervall

Flächenberechnung:

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{10}x^2 + x + \frac{8}{5}\right) dx = \left[\frac{1}{30}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{5}x\right]_1^4$$

$$= \left(\frac{1}{30} \cdot 4^3 + \frac{1}{2} \cdot 4^2 + \frac{8}{5} \cdot 4\right) - \left(\frac{1}{30} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{8}{5} \cdot 1\right)$$

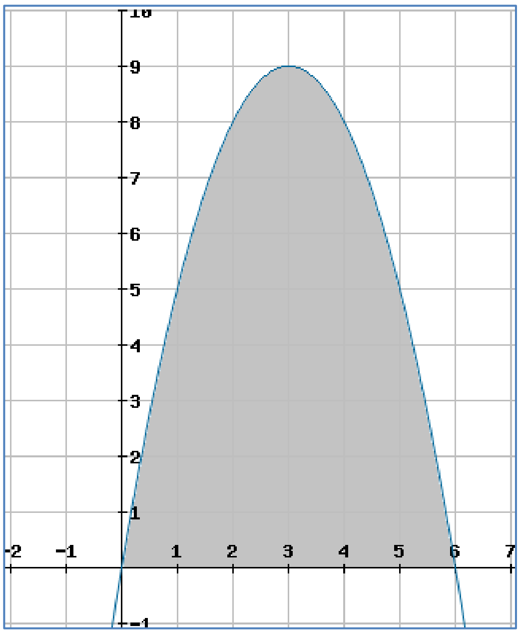
$$= \frac{248}{15} - \frac{32}{15} = \frac{216}{15} = \frac{72}{5} \text{ FE}$$

Aufgabe 2

$f(x) = -x^2 + 6x$

Bestimme den Flächeninhalt, welchen die Funktion f(x) mit der x-Achse einschließt.

Lösung:



<u>Bestimmung der Nullstellen</u>

$f(x) = -x^2 + 6x = 0$

$x \cdot (-x + 6) = 0$

$x_1 = 0 \quad \Rightarrow N_1(0|0)$

$-x + 6 = 0 \quad | +x$

$x_2 = 6 \quad \Rightarrow N_2(6|0)$

<u>Flächenberechnung:</u>

$$\int_0^6 (-x^2 + 6x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^6 = \left(-\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2\right)$$

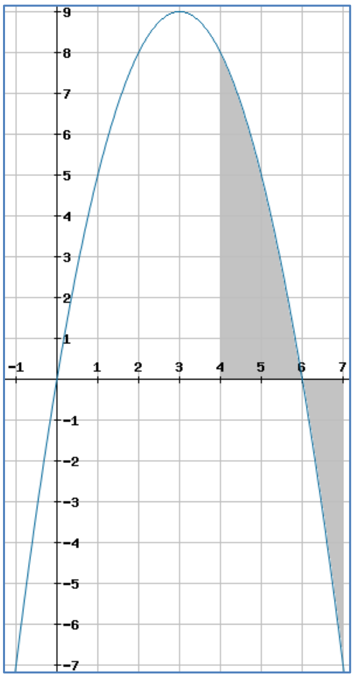
$= 36 - 0 = 36$ FE

Aufgabe 3

$f(x) = -x^2 + 6x$

Bestimme den Flächeninhalt zwischen der Funktion f(x) und der x-Achse im Intervall [4,7]

Lösung:



Existieren Nullstellen im Intervall ?

Wie in Aufgabe 1 ermittelt, fällt die Nullstelle $N_2(6|0)$ in das Intervall. Somit müssen wir die Fläche aufteilen in die Intervalle [4,6] und [6,7].

$$\int_4^6 (-x^2 + 6x)dx = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_4^6 = \left(-\tfrac{1}{3} \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2\right) - \left(-\tfrac{1}{3} \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2\right)$$

$$= 36 - \frac{80}{3} = \frac{28}{3} \text{ FE}$$

$$\int_6^7 (-x^2 + 6x)dx = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_6^7 = \left(-\tfrac{1}{3} \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2\right) - \left(-\tfrac{1}{3} \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2\right)$$

$$= \frac{98}{3} - 36 = -\frac{10}{3} \text{ FE}$$

(Negativer Flächenwert, da unterhalb der x-Achse)

$$A = \left|\int_4^6 (-x^2 + 6x)dx\right| + \left|\int_6^7 (-x^2 + 6x)dx\right| = \frac{28}{3} + \frac{10}{3} = \frac{38}{3} \text{ FE}$$

Aufgabe 4

$f(x) = -x^2 + 6x$

Der Flächeninhalt zwischen der Funktion f(x) und der x-Achse im Intervall [0,a] beträgt $\frac{28}{3}$ FE (0 < a < 6). Welchen Wert besitzt a ?

Lösung:

Im Intervall [0,a] existiert keine Nullstelle, somit lautet der Lösungsansatz:

$$\int_0^a (-x^2 + 6x)dx = \frac{28}{3}$$

$$\int_0^a (-x^2 + 6x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^a = \left(-\frac{1}{3}\cdot a^3 + 3\cdot a^2\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot 0^3 + 3\cdot 0^2\right) = \frac{28}{3}$$

$$-\frac{1}{3}a^3 + 3a^2 = \frac{28}{3} \quad |+\frac{28}{3} \quad |\cdot(-3)$$

$$a^3 - 9a^2 + 28 = 0$$

Lösung der Gleichung durch Polynomdivision:

Raten einer Nullstelle: $a_1 = 2$

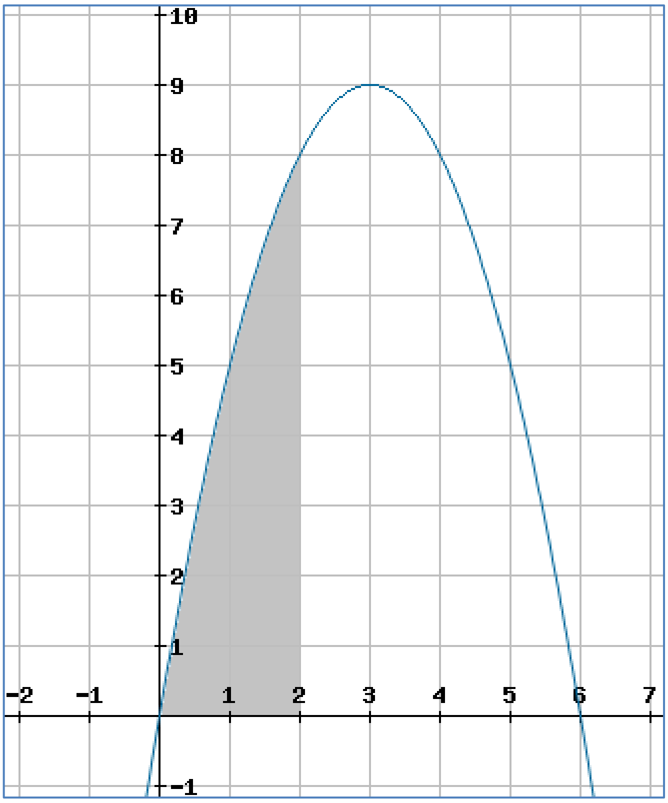
$$\begin{array}{lllll}
& (a^3 & -\ 9a^2 & +\ 28) : (a - 2) = a^2 - 7a - 14 & \\
-| & \underline{a^3} & \underline{-\ 2a^2} & & \\
& / & -7a^2 & +\ 28 & \\
& -| & \underline{-7a^2} & \underline{+\ 14a} & \\
& & / & -14a & +\ 28 \\
& & & \underline{-14a} & \underline{+\ 28} \\
& & & / & /
\end{array}$$

Lösung der Restgleichung mit pq-Formel: $p = -7$, $q = -14$

$$a_{2,3} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 14}$$

⇨ $a_2 \approx 8{,}62$ => nicht im Intervall (0 < a < 6), somit keine Lösung

⇨ $a_3 \approx -1{,}62$ => nicht im Intervall (0 < a < 6) , somit keine Lösung


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7

Aufgabe 5

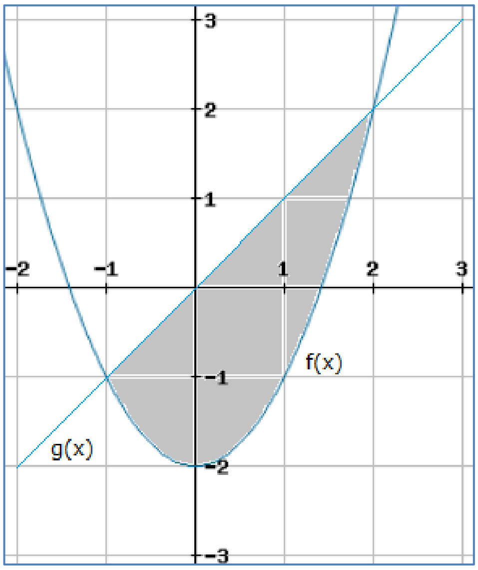
Gegeben sind die Funktionen

$f(x) = x^2 - 2$

$g(x) = x$

Wie groß ist die Fläche, die von den beiden Kurven eingeschlossen wird ?

Lösung:



<u>Schnittpunkte = Integrationsgrenzen</u>

$f(x) = g(x)$

$x^2 - 2 = x \quad |-x$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$

$\Rightarrow x_1 = -1, \; x_2 = 2$

<u>Flächenberechnung:</u>

$A = \int_{-1}^{2}(f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{2}(x^2 - 2 - x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{2}$

$= \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1)\right)$

$= -\frac{10}{3} - \frac{7}{6} = -\frac{27}{6} = -\frac{9}{2}$ FE

Aufgabe 6

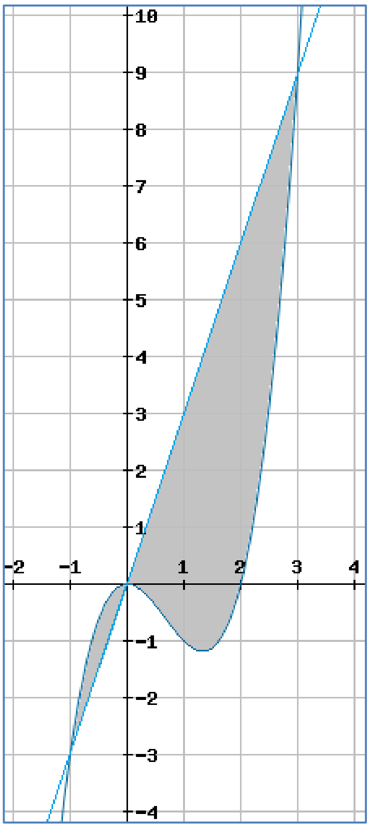
Gegeben sind die Funktionen

$f(x) = x^3 - 2x^2$

$g(x) = 3x$

Wie groß ist die Fläche, die von den beiden Kurven eingeschlossen wird ?

Lösung:



<u>Bestimmung der Schnittpunkte</u>

$f(x) = g(x)$

$x^3 - 2x^2 = 3x \qquad | -3x$

$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

$\Rightarrow \; x_1 = 0, \; x_2 = -1, \; x_3 = 3$

Flächenberechnung von Schnittpunkt zu Schnittpunkt !

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(f(x) - g(x))dx\right| + \left|\int_{0}^{3}(f(x) - g(x))dx\right|$$

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - 2x^2 - 3x)dx\right| + \left|\int_{0}^{3}(x^3 - 2x^2 - 3x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}\right|$$

$$= \left|\left[0 - \left(\frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{2}{3}(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2\right)\right]\right| + \left|\left[\left(\frac{1}{4}3^4 - \frac{2}{3}3^3 - \frac{3}{2}3^2\right) - 0\right]\right|$$

$$= \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6} \text{ FE}$$