

Produktintegration

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

Aufgabe 1

$$\int \sin(x) \cdot x dx$$

Lösung

$$u(x) = -\cos(x) \quad u'(x) = \sin(x)$$

$$v(x) = x \quad v'(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \int \sin(x) \cdot x dx &= -\cos(x) \cdot x - \int (-\cos(x)) \cdot 1 dx \\ &= -x \cdot \cos(x) + \sin(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\int (3x \cdot x^4) dx$$

Lösung(1)

$$u(x) = \frac{1}{5} x^5 \quad u'(x) = x^4$$

$$v(x) = 3x \quad v'(x) = 3$$

$$\int (3x \cdot x^4) dx = \frac{1}{5} x^5 \cdot 3x - \int \frac{1}{5} x^5 \cdot 3 dx$$

$$= \frac{3}{5} x^6 - \frac{3}{5} \int x^5 dx$$

$$= \frac{3}{5} x^6 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} x^6 = \frac{1}{2} x^6$$

Lösung(2)

$$\int (3x \cdot x^4) dx = \int 3x^5 dx = \frac{1}{2} x^6$$

Aufgabe 3

$$\int x \cdot e^x \, dx$$

Lösung

$$u(x) = e^x \quad u'(x) = e^x$$

$$v(x) = x \quad v'(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^x \, dx &= x \cdot e^x - \int e^x \, dx \\ &= x \cdot e^x - e^x \\ &= e^x \cdot (x - 1) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$\int x^2 \cdot \cos(x) \, dx$$

Lösung

$$u(x) = \sin(x) \quad u'(x) = \cos(x)$$

$$v(x) = x^2 \quad v'(x) = 2x$$

$$\int x^2 \cdot \cos(x) \, dx = x^2 \cdot \sin(x) - \int \sin(x) \cdot 2x \, dx$$

Erneute Produktintegration des zweiten Terms $\int \sin(x) \cdot 2x \, dx$

$$u(x) = -\cos(x) \quad u'(x) = \sin(x)$$

$$v(x) = 2x \quad v'(x) = 2$$

$$\begin{aligned} \int \sin(x) \cdot 2x \, dx &= -\cos(x) \cdot 2x - \int -\cos(x) \cdot 2 \, dx \\ &= -2x \cdot \cos(x) + 2 \sin(x) \end{aligned}$$

Gesamtergebnis:

$$\int x^2 \cdot \cos(x) \, dx = x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2 \sin(x)$$

Aufgabe 5

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx$$

Lösung

$$u(x) = -\cos(x) \quad u'(x) = \sin(x)$$

$$v(x) = \cos(x) \quad v'(x) = -\sin(x)$$

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx = -\cos^2(x) - \int (-\cos(x)) \cdot (-\sin(x)) \, dx$$

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx = -\cos^2(x) - \int \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx$$

Beidseitige Addition von $\int \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx$

$$2 \cdot \int \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx = -\cos^2(x)$$

Division durch 2

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x)$$