edoceralph

Aufgabe 1

Eine Parabel 2. Ordnung hat einen Hochpunkt bei H $(\frac{1}{2}|-\frac{9}{4})$ und geht durch den Punkt A(2|0).

Lösung

Ansatz:

Parabel 2. Ordnung

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

Aufstellen der Gleichungen:

Punkt A(2|0)

$f(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (I) \quad 0 = 4a + 2b + c$

Hochpunkt H $(\frac{1}{2}|-\frac{9}{4})$

Verwendung von H als normaler Punkt H $(\frac{1}{2}|-\frac{9}{4})$

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad (II) \quad -\frac{9}{4} = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c \quad | \cdot 4$

$-9 = a + 2b + 4c$

Verwendung von H als Hochpunkt

$f'(\frac{1}{2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (III) \quad 0 = a + b$

Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lrcl} (I) & 0 &=& 4a + 2b + c \\ (II) & -9 &=& a + 2b + 4c \\ (III) & 0 &=& a + b \end{array}$$

$4 \cdot (I) - (II) \qquad 0 = 16a + 8b + 4c$

$-| \quad \underline{-9 = a + 2b + 4c}$

$\Rightarrow (IV) \qquad 9 = 15a + 6b$

$$\begin{array}{lrcl}
(IV) - 6\cdot(III) & 9 &=& 15a + 6b \\
-| & 0 &=& 6a + 6b \\
\hline
 & 9 &=& 9a \quad \Rightarrow a = 1
\end{array}$$

a in (III) $\quad 0 = 1 + b \quad \Rightarrow b = -1$

a, b in (I) $\quad 0 = 4 - 2 + c \quad \Rightarrow c = -2$

Lösung: $\boxed{f(x) = x^2 - x - 2}$

Aufgabe 2

Eine Parabel 3. Ordnung geht durch den Ursprung und den Punkt A (3|0) und hat darüber hinaus einen Wendepunkt bei W (2|2).

Lösung

Ansatz:

Parabel 3. Ordnung

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Aufstellen der Gleichungen:

Ursprung

$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (I) \quad 0 = d$

Punkt A(3|0)

$f(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad (II) \quad 0 = 27a + 9b + 3c + d$

Wendepunkt W (2|2)

Verwendung von W als normaler Punkt W (2|2)

$f(2) = 2 \quad \Rightarrow \quad (III) \quad 2 = 8a + 4b + 2c + d$

Verwendung von H als Hochpunkt

$f''(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (IV) \quad 0 = 12a + 2b$

Lösen des Gleichungssystems:

Gleichung I ist mit d = 0 bereits gelöst und wird in den weiteren Gleichungen bereits berücksichtigt

$$(II) \quad 0 = 27a + 9b + 3c$$

$$(III) \quad 2 = 8a + 4b + 2c$$

$$(IV) \quad 0 = 12a + 2b$$

$2 \cdot (II) - 3 \cdot (III) \qquad 0 = 54a + 18b + 6c$

$-| \qquad 6 = 24a + 12b + 6c$

$\Rightarrow (V) \qquad -6 = 30a + 6b$

$3 \cdot (IV) - (V)$	$0 = 36a + 6b$	
	$-\,\vert\quad \underline{-6 = 30a + 6b}$	
	$6 = 6a$	$\Rightarrow a = 1$
a in (IV)	$0 = 12 + 2b$	$\Rightarrow b = -6$
a, b in (II)	$0 = 27 - 54 + 3c$	$\Rightarrow c = 9$

Lösung: $\boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}$

Aufgabe 3

Eine Parabel 3. Ordnung ist punktsymmetrisch zum Ursprung und besitzt einen Hochpunkt bei H $(2|\frac{16}{3})$.

Lösung

Ansatz:

Parabel 3. Ordnung

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Punktsymmetrie zum Ursprung (nur ungerade Exponenten)

$$f(x) = ax^3 + cx$$

$$f'(x) = 3ax^2 + c$$

Aufstellen der Gleichungen:

Hochpunkt H $(2|\frac{16}{3})$

Verwendung von H als normaler Punkt H $(2|\frac{16}{3})$

$f(2) = \frac{16}{3}$ => (I) $\frac{16}{3} = 8a + 2c$

Verwendung von H als Hochpunkt

$f'(2) = 0$ => (II) $0 = 12a + c$

Lösen des Gleichungssystems:

(I) $\frac{16}{3} = 8a + 2c$

(II) $0 = 12a + c$

(I) − 2·(II)

$$\frac{16}{3} = 8a + 2c$$

$$-|\quad 0 = 24a + 2c$$

$$\frac{16}{3} = -16a \quad => a = -\frac{1}{3}$$

a in (II) $0 = -4 + c$ => $c = 4$

Lösung: $\boxed{f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x}$