

edoceralph

Rotation um die x-Achse:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Aufgabe 1

$$f(x) = x^2 \quad \text{Intervall } [0; 2]$$

$$\pi \cdot \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \cdot \int_0^2 x^4 dx = \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 = \pi \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot 32 - \frac{1}{5} \cdot 0 \right] \approx 20,1$$

Aufgabe 2

$$f(x) = 5 - 3 \cdot e^{0,5x} \quad \text{Intervall } [1; 3]$$

$$\begin{aligned} \pi \cdot \int_1^3 (5 - 3 \cdot e^{0,5x})^2 dx &= \pi \cdot \int_1^3 (25 - 30 \cdot e^{0,5x} + 9 \cdot e^x) dx \\ &= \pi \cdot [25x - 60 \cdot e^{0,5x} + 9 \cdot e^x]_1^3 \\ &= \pi \cdot [(25 \cdot 3 - 60 \cdot e^{0,5 \cdot 3} + 9 \cdot e^3) - (25 \cdot 1 - 60 \cdot e^{0,5 \cdot 1} + 9 \cdot e^1)] \\ &\approx 36,33\pi \approx 114,13 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$f(x) = 0,7x^3 + 0,4 \quad \text{Intervall } [-0,5; 1]$$

$$\begin{aligned} \pi \cdot \int_{-0,5}^1 (0,7x^3 + 0,4)^2 dx &= \pi \cdot \int_{-0,5}^1 (0,49x^6 + 0,56x^3 + 0,16) dx = \\ &= \pi \cdot [0,07x^7 + 0,14x^4 + 0,16x]_{-0,5}^1 \\ &= \pi \cdot [(0,07 \cdot 1^7 + 0,14 \cdot 1^4 + 0,16 \cdot 1) \\ &\quad - (0,07 \cdot (-0,5)^7 + 0,14 \cdot (-0,5)^4 + 0,16 \cdot (-0,5))] \\ &\approx \pi \cdot [(0,37) - (-0,0718)] \approx 0,4418 \cdot \pi \approx 1,388 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$f(x) = 9 - x^2 \quad \text{Intervall [oberhalb der x-Achse]}$$

Bestimmung der Nullstellen:

$$f(x) = 9 - x^2 = 0 \quad x_{N1} = -3; \quad x_{N2} = 3$$

$$\Rightarrow \text{Intervall } [-3; 3]$$

Rotationsvolumen

$$\begin{aligned} \pi \cdot \int_{-3}^3 (9 - x^2)^2 dx &= \pi \cdot \int_{-3}^3 (81 - 18x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \cdot \left[81x - \frac{18}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-3}^3 \\ &= \pi \cdot \left[\left(81 \cdot 3 - \frac{18}{3} \cdot 3^3 + \frac{1}{5} \cdot 3^5 \right) - \left(81 \cdot (-3) - \frac{18}{3} \cdot (-3)^3 + \frac{1}{5} \cdot (-3)^5 \right) \right] \\ &\approx \pi \cdot [(129,6) - (-129,6)] = 259,2 \cdot \pi \approx 814,30 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

$$f(x) = \frac{1}{10}x^2 + 1 \quad \text{Intervall } [-5; 5]$$

$$\begin{aligned} \pi \cdot \int_{-5}^5 \left(\frac{1}{10}x^2 + 1 \right)^2 dx &= \pi \cdot \int_{-5}^5 \left(\frac{1}{100}x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 1 \right) dx \\ &= \pi \cdot \left[\frac{1}{500}x^5 + \frac{1}{15}x^3 + x \right]_{-5}^5 \\ &= \pi \cdot \left[\left(\frac{1}{500} \cdot 5^5 + \frac{1}{15} \cdot 5^3 + 5 \right) - \left(\frac{1}{500} \cdot (-5)^5 + \frac{1}{15} \cdot (-5)^3 + (-5) \right) \right] \\ &= \pi \cdot \left[\left(\frac{235}{12} \right) - \left(\frac{235}{12} \right) \right] = \frac{235}{6} \cdot \pi \approx 123,05 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{Intervall [oberhalb der x-Achse]}$$

Bestimmung der Nullstellen:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} = 0 \quad x_{N1} = -2; \quad x_{N2} = 2$$

$$\Rightarrow \text{Intervall } [-2; 2]$$

Rotationsvolumen

$$\begin{aligned} \pi \cdot \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}^2 dx &= \pi \cdot \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \pi \cdot \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^2 \\ &= \pi \cdot \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^2 = \pi \cdot \left[\left(4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 \right) - \left(4 \cdot (-2) - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 \right) \right] \\ &= \pi \cdot \left[\left(\frac{16}{3} \right) - \left(-\frac{16}{3} \right) \right] = \frac{32}{3} \cdot \pi \end{aligned}$$

Anmerkungen:

$f(x)$ ist die Funktionsgleichung eines Halbkreises mit dem Radius 2. Um die x-Achse rotierend ergibt sich in diesem Fall eine Kugel mit dem Radius 2.

$$\Rightarrow \text{Volumen einer Kugel} = \text{Rotationsvolumen} = V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3} \cdot \pi$$