

Ableitung über Umkehrfunktion

$$f(x)' = \frac{1}{g'(y)}$$

Aufgabe 1

$$f(x) = \ln(x)$$

Lösung

$$f(x) = y = \ln(x)$$

$$g(y) = x = e^y \quad (\text{Umkehrfunktion})$$

$$g'(y) = e^y$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = e^x$$

Lösung

$$f(x) = y = e^x$$

$$g(y) = x = \ln(y) \quad (\text{Umkehrfunktion})$$

$$g'(y) = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

Aufgabe 3

$$f(x) = \arcsin(x)$$

Lösung

$$f(x) = y = \arcsin(x)$$

$$g(y) = x = \sin(y) \quad (\text{Umkehrfunktion})$$

$$g'(y) = \cos(y) = \cos(\arcsin(x))$$

$$\text{Additionstheorem: } \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

$$\Rightarrow g'(y) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aufgabe 4

$$f(x) = \arctan(x)$$

Lösung

$$f(x) = y = \arctan(x)$$

$$g(y) = x = \tan(y) \quad (\text{Umkehrfunktion})$$

$$g'(y) = \frac{1}{\cos^2(y)}$$

$$\text{Additionstheorem: } \sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$$

$$= \frac{\sin^2(y) + \cos^2(y)}{\cos^2(y)}$$

$$= \frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} + \frac{\cos^2(y)}{\cos^2(y)}$$

$$= \tan^2(y) + 1$$

$$= \tan^2(\arctan(x)) + 1$$

$$= x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$