Kombinatorik

Aufgabe 1

In einer Urne befinden sich fünf Kugeln in jeweils verschiedenen Farben. Es sollen drei Kugeln ohne Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge gezogen werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es ?

k-Variation ohne Wiederholung:

n = 5, k = 3 => V(oW) = $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$

Aufgabe 2

Um die Abiturprüfung mit mindestens 5 Punkten zu bestehen muss ein Abiturient mindesten die Hälfte aller Punkte erzielen. Paul ist optimistisch/naiv und geht davon aus, dass die von ihm bearbeiteten Aufgaben zu 100% richtig sind und dass alle Aufgaben die gleiche max. Punktzahl besitzen. Wie viele Auswahlmöglichkeiten der zu lösenden Aufgaben hat Paul wenn die Prüfung 12 Aufgaben enthält ?

k-Kombination ohne Wiederholung:

Er muss 6 Aufgaben auswählen: => $\binom{12}{6} = 924$

Aufgabe 3

Thomas kann 10 Liter Saft auf einmal aus dem Keller holen. Dort existieren 4 verschiedene Saftsorten. Wie viele Saft-Kombinationen kann Thomas hochholen ?

k-Kombination mit Wiederholung:

n = 10, k = 4 => $K_{(mW)} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{10+4-1}{4} = \binom{13}{4} = 715$

Aufgabe 4

Eine Gruppe von 20 Personen feiert gemeinsam Silvester. Wie oft hört man Gläser klingen wenn jeder mit jedem anstößt ?

k-Kombination ohne Wiederholung:

Jedes Kind erhält 5 Bilder => $\binom{20}{2} = 190$

Aufgabe 5

Bei einem Formel-1 Rennen starten 16 Fahrer. Die drei Erstplatzierten landen auf dem Treppchen. Wie viele verschiedenen Konstellationen sind auf dem Treppchen möglich ?

k-Variation ohne Wiederholung:

n = 16, k = 3 => V(oW) = $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = 3360$

Aufgabe 6

Bei einer Mini-Lotterie liegen 10 durchnummerierte Kugeln in einer Urne ? Wie viele Stichproben gibt es wenn 4 Kugeln **ohne** zurücklegen gezogen werden

k-Kombination ohne Wiederholung:

n = 10, k = 4 => K(oW) = $\binom{n}{k} = \binom{10}{4} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$

Aufgabe 7

Ein Passwort der Passwortlänge 6 darf aus großen und kleinen Buchstaben sowie Zahlen bestehen. Bei einer sogenannten „Brute-Force-Attacke“ versucht ein Hacker das Passwort zu knacken indem alle möglichen Kombinationen ausprobiert werden. Eine spezielle Software kann hierbei 2 Milliarden Passwörter in der Sekunde generieren. Wie lange wird der Hacker im Durchschnitt benötigen wenn man davon ausgeht, dass er durchschnittlich nach der Hälfte aller Versuche das richtige Passwort findet ?

k-Variation mit Wiederholung:

Anzahl möglicher Zeichen: $n = 2 \cdot 26 + 10 = 62$

Anzahl der Stellen: $k = 6$

=> Anzahl möglicher Passwörter: $V(mW) = n^k = 62^6 = 56.800.235.584$

Treffer nach der Hälfte aller Passwörter: 28.400.117.792

Bei 2.000.000.000 Passwort-Generierungen in der Sekunde benötigt die Software also gerade noch

28.400.117.792 : 2.000.000.000 1/Sekunde = 14,2 Sekunden

Aufgabe 8

Wie viele 4-Buchstaben-Worte kann man aus den Buchstaben des Wortes SECURITY bilden ?

k-Variation ohne Wiederholung:

$n = 8, k = 4$ => $V(oW) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 1680$

Wie viele dieser Wörter enthalten nur Konsonanten ?

k-Variation ohne Wiederholung:

$n = 5, k = 4$ => $V(oW) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 120$

Aufgabe 9

5 Lilien-Fans, 8 Eintracht-Fans und 3 Kickers-Fans stehen im jeweiligen Vereinstrikot am Bahnsteig in einer Reihe. Wie viele mögliche Anordnungen von Fußball-Fans sind möglich wenn Fans einer Mannschaft nicht unterschieden werden können ?

Permutation mit Wiederholungen:

$$n = 16, n_{Lilien} = 5, n_{Eintracht} = 8,\ n_{Kickers} = 3$$

$$P_{(mW)} = \frac{n!}{n_{Lilien}! \cdot n_{Eintracht}! \cdot n_{Kickers}!} = \frac{16!}{5! \cdot 8! \cdot 3!} = 720.720$$

Wie viele mögliche Anordnungen ergeben sich wenn die Fans einer Mannschaft jeweils nebeneinander stehen sollen ?

$3! = 6$

Aufgabe 10

Ein Mathekurs besteht aus 8 Jungen und 6 Mädchen. Auf wie viele Arten kann man aus ihnen 4 Schüler auswählen ?

k-Kombination ohne Wiederholung:

$$n = 14, k = 4 \quad => \quad K(oW) = \binom{n}{k} = \binom{14}{4} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{14!}{4! \cdot (14-4)!} = \frac{14!}{4! \cdot 10!} = 1001$$

Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn unter den 4 Personen genau ein Mädchen sein soll ?

Für das eine Mädchen gibt es 6 Möglichkeiten. Von den 8 Jungen müssen noch 3 ausgewählt werden:

$$\binom{6}{1} \cdot \binom{8}{3} = 336$$

Aufgabe 11

Eine Münze wird 8 mal geworfen. Wie viele verschiedene Ergebnisse sind möglich ?

k- Variation mit Wiederholung:

$$n = 2, k = 8 \quad => \quad V(mW) = n^k = 2^8 = 256$$

Aufgabe 12

Auf wie viele Arten kann man aus 16 Schülern 2 auswählen um gegeneinander Schach zu spielen ?

k-Kombination ohne Wiederholung:

=> $\binom{16}{2} = 120$

Aufgabe 13

Wie viele mögliche Sitzanordnungen ergeben sich für 10 Kursteilnehmer in einem Kursraum mit 10 Stühlen ?

Permutation ohne Wiederholung:

n = 10 => P(oW) = 10! = 3.628.800

Wieviel Möglichkeiten gibt es, wenn von den 10 Kursteilnehmern zwei nebeneinandersitzen wollen ?

Permutationen ohne Wiederholung:

Anordnungen der 8 verbliebenen untereinander:

n = 8 => P(oW) = 8! = 40.320

Anordnungen der 2 Nebeneinandersitzenden untereinander:

n = 2 => P(oW) = 2! = 2

Anordnungen der 2 Nebeneinandersitzenden unter den 8 Verbliebenen: 9

⇨ 40.320 · 2 · 9 = 725.760

Aufgabe 14

Wie viele Wörter kann man aus den Buchstaben des Wortes EDOCERALPH bilden ?

Permutation mit Wiederholung (Buchstabe „E“ ist doppelt):

$n = 10, n_E = 2, n_D = n_O = n_C = n_R = n_A = n_L = n_P = n_H = 1$

$P_{(mW)} = \frac{n!}{n_E! \cdot n_D! \cdot n_O! \cdot n_C! \cdot n_R! \cdot n_A! \cdot n_L! \cdot n_P! \cdot n_H!} = \frac{10!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 1.814.400$

Aufgabe 15

Ein Byte besteht aus 8 Bits. Wie viele verschiedenen Zahlen kann ein Byte darstellen wenn genau 4 Bits mit „1“ belegt sind ?

k-Kombination ohne Wiederholung:

=> $\binom{8}{4} = 70$

Aufgabe 16

8 Harry Potter DVDs, 6 Star Wars DVDs und 4 Lethal Weapon DVDs sollen in ein Regal gestellt werden. Wie viele Anordnungsmöglichkeiten gibt es ?

Permutation ohne Wiederholung:

n = 18 => P(oW) = 18! = 6.402.373.705.728.000

Auf wie viele Arten können die DVDs aufgestellt werden wenn diese Serien jeweils zusammengestellt werden sollen ?

3! · 8! · 6! · 4! = 4.180.377.600

Auf wie viele Arten können die DVDs aufgestellt werden wenn diese Serien jeweils in der richtigen Reihenfolge aufgestellt werden sollen ?

3!

Aufgabe 17

Wie viele Wörter kann man aus den Buchstaben des Wortes DARMSTADT bilden ?

Permutation mit Wiederholungen (Buchstaben „D“, „A“ und „T“ doppelt):

$$n = 9, n_D = n_A = n_T = 2,\ n_R = n_M = n_S = 1$$

$$P_{(mW)} = \frac{n!}{n_D! \cdot n_A! \cdot n_R! \cdot n_M! \cdot n_S! \cdot n_T!} = \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = 45.360$$

Aufgabe 18

Eine Gruppe von 6 Kursteilnehmern kommt zu spät zum Kurs. In der einen Ecke sind noch 4 Plätze frei, in einer anderen Ecke sind noch 2 Plätze frei. Auf wie viele Arten können sich die 6 Kursteilnehmern auf die zwei freien Ecken aufteilen ?

k-Kombination ohne Wiederholung:

=> $\binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{4} = 15$

Aufgabe 19

4 Paare fliegen gemeinsam in den Urlaub und müssen am Flughafen einzeln durch den Metalldetektor schreiten.

Auf wie viele Arten können sie dies tun ?

Permutation ohne Wiederholung:

n = 8 => P(oW) = 8! = 40.320

Wie viele Arten bleiben übrig wenn nach „Ladies first“ alle Damen zuerst den Detektor passieren ?

$4! \cdot 4! = 576$

Wie viele Arten bleiben übrig wenn die Paare paarweise den Detektor passieren ?

$4! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 384$

Aufgabe 20

Ein besonders sicheres Fahrrad-Zahlenschloss besitzt 5 Zahlenräder ? Wie viele mögliche Anordnungen gibt es ?

k-Variation mit Wiederholung:

n = 10, k = 5 => V(mW) = $n^k = 10^5 = 100.000$

Aufgabe 21

Auf einem Nachtisch-Buffet stehen 6 verschiedene Nachtische zur Auswahl. Ralph hat noch genug Hunger für vier Nachtische. Wie viele Möglichkeiten gibt es für Ralph möglichst viele verschiedene Nachtische zu essen ?

k-Kombination ohne Wiederholung (es sollen ja möglichst viele verschiedene sein):

n = 6, k = 4 => K(oW) = $\binom{n}{k} = \binom{6}{4} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{6!}{4! 2!} = 15$

Aufgabe 22

In einer Urne befinden sich sechs verschiedenfarbige Kugeln. Es sollen drei Kugeln mit Zurücklegen (= mit Wiederholung) und ohne Beachtung der Reihenfolge gezogen werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

k-Kombination mit Wiederholung:

n = 6, k = 3 => $K_{(mW)} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$

Aufgabe 23

Ein Abiturient muss in der Abiturprüfung Klausur 10 von 12 Aufgaben lösen um eine zweistellige Punktzahl zu erreichen. Wie viele Auswahlmöglichkeiten hat er ?

k-Kombination ohne Wiederholung:

n = 12, k = 10 => K(oW) = $\binom{n}{k} = \binom{12}{10} = 66$

Wie viele Auswahlmöglichkeiten hat er wenn er die ersten beiden Aufgaben lösen muss ?

$$\binom{2}{2} \cdot \binom{10}{8} = 45$$

Wie viele Auswahlmöglichkeiten hat er wenn er genau 2 der ersten 4 Aufgaben lösen muss?

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{8} = 6$$

Aufgabe 24

Markus besitzt 3 Rennmäuse. Wenn jemand den Raum betritt, verstecken diese sich in 5 möglichen Löchern. Hierbei können sich auch mehrere Mäuse im gleichen Loch verstecken können, die Reihenfolge der Mäuse im Loch ist natürlich irrelevant. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten gibt es ?

k-Kombination mit Wiederholung:

n = 5, k = 3 => $K_{(mW)} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$

Aufgabe 25

Berechne die Anzahl der Möglichkeiten 15 WM-Bilder unter 3 Kinder so aufzuteilen, dass jedes Kind die gleiche Anzahl Bilder erhält

k-Kombination ohne Wiederholung:

Jedes Kind erhält 5 Bilder => $\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} = 756.756$

Aufgabe 26

Beim Spiel „Edoc“ liegen 10 durchnummerierte Kugeln in einer Urne ? Wie viele **geordnete** Stichproben gibt es wenn 4 Kugeln **ohne** Zurücklegen gezogen werden

k- Variation ohne Wiederholung:

n = 10, k = 4 => K(oW) = $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$

Wie viele **geordnete** Stichproben gibt es wenn 4 Kugeln **mit** zurücklegen gezogen werden

k- Variation mit Wiederholung:

n = 10, k = 4 => V(mW) = $n^k = 10^4 = 10.000$

Aufgabe 27

Auf wie viele Arten kann man aus 6 Jungen und 7 Mädchen einen Ausschuss zusammenstellen, welcher aus 3 Jungen und 4 Mädchen besteht ?

k-Kombination ohne Wiederholung:

=> $\binom{6}{3} \cdot \binom{7}{4} = 700$

Aufgabe 28

Wie viele Möglichkeiten gibt es um 10 Kursteilnehmer auf 12 Stühle zu verteilen ?

k- Variation ohne Wiederholung:

n = 12, k = 10 => K(oW) = $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{12!}{(12-10)!} = \frac{12!}{2!} = 239.500.800$

Aufgabe 29

14 Abiturienten sind in der Abiturprüfung durchgefallen und müssen nun das letzte Schuljahr wiederholen. Die dafür vorgesehenen Mathekurse können jeweils noch 3, 5 bzw. 6 Schüler aufnehmen. Wie viele Varianten gibt es für die Verteilung der 14 Schüler ?

k-Kombination ohne Wiederholung:

=> $$\binom{14}{3} \cdot \binom{11}{5} \cdot \binom{6}{6} = 168.168$$