

Differentialrechnung

Ableitung:	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Extrempunkte:	$f'(x) = 0$	$f''(x) \neq 0$
		$f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Min}, f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Max}$
Wendepunkte:	$f''(x) = 0$	$f'''(x) \neq 0$

1. Ermittle die Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$

b) $f(x) = 4x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 20x^4$

c) $f(x) = 7 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

d) $f(x) = 6x^4 - 3x^3 - 10 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 24x^3 - 9x^2$

e) $f(x) = -\frac{1}{4}x^6 + 4x^2 + 5x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{3}{2}x^5 + 8x + 5$

2. Bestimme die Steigung an der Stelle $x = x_0$

a) $f(x) = x^2, x_0 = 2$

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$

b) $f(x) = 4x^3 + 2, x_0 = 3$

$f'(x) = 12x^2 \Rightarrow f'(3) = 108$

c) $f(x) = 2x^5 - 4x^2 + 3x, x_0 = 1$

$f'(x) = 10x^4 - 8x + 3 \Rightarrow f'(1) = 5$

3. Bestimme die Gleichung der Tangentengerade an der Stelle $x = x_0$

a) $f(x) = x^2 + 2, \quad x_0 = 2$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4 = m$$

$$y = f(2) = 6$$

$$y = mx + b \Rightarrow 6 = 4 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow y = 4x - 2$$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad x_0 = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} = m$$

$$y = f(1) = -\frac{3}{4}$$

$$y = mx + b \Rightarrow -\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1 + b \Rightarrow b = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$$

c) $f(x) = 2x^3 - 2x + 2, \quad x_0 = -1$

$$f'(x) = 6x^2 - 2 \Rightarrow f'(-1) = 4 = m$$

$$y = f(-1) = 2$$

$$y = mx + b \Rightarrow 2 = 4 \cdot (-1) + b \Rightarrow b = 6$$

$$\Rightarrow y = 4x + 6$$

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 + 6x$

a) An welchen Stellen hat die Funktion die Steigung -6?

$$f'(x) = 6x + 6 = -6 \Rightarrow x = -2$$

b) In welchen Punkten besitzt die Kurve eine zur x-Achse parallele Tangente?

$$f'(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

5. Berechne die Extrempunkte der folgenden Funktionen.

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 6$

$$f'(x) = -2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

$$f''(x) = -2 \quad \Rightarrow \quad f''(3) = -2 \Rightarrow \text{HP}$$

$$f(3) = 3$$

$\Rightarrow \text{HP}(3|3)$

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$

$$f'(x) = -x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow (\text{pq-Formel}) \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$$

$$f''(x) = -2x + 4 \quad \Rightarrow \quad f''(3) = -2 \Rightarrow \text{HP}, f''(1) = 2 \Rightarrow \text{TP}$$

$$f(3) = 0, f(1) = -\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow \text{HP}(3|0), \text{TP}(1|-\frac{4}{3})$

c) $f(x) = 6x^3 - 9x^2$

$$f'(x) = 18x^2 - 18x = 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{pq-Formel oder Faktorisierung}) \\ \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$$

$$f''(x) = 36x - 18 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -18 \Rightarrow \text{HP}, f''(1) = 18 \Rightarrow \text{TP}$$

$$f(0) = 0, f(1) = -3$$

$\Rightarrow \text{HP}(0|0), \text{TP}(1|-3)$

6. In welchem Punkt besitzt die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ Ihre maximale Steigung?

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$$

$$f''(x) = 3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

7. Berechne die Wendepunkte der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$$

$$f''(x) = x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f'''(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'''(3) = 1 \neq 0$$

$$f(3) = 3$$

$\Rightarrow \text{WP}(3|3)$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0$$

$$f(2) = 1$$

$\Rightarrow$ WP(2|1)

$$\text{c) } f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = 2x^3 - 6x$$

$$f''(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$$

$$f'''(x) = 12x \Rightarrow f'''(1) = 12 \neq 0, f'''(-1) = -12 \neq 0$$

$$f(1) = -1, f(-1) = -1$$

$\Rightarrow$ WP₁(1|-1), WP₂(-1|-1)

8. Untersuche die folgenden Funktionen auf Extremwerte.

$$\text{a) } f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow (\text{pq-Formel}) \Rightarrow x_{1,2} = 1$$

$$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt!}$$

$\Rightarrow$ Keine Extremwerte!

$$\text{b) } f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\text{Faktorisierung} + \text{pq-Formel}) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$$

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$

$$\Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt!}$$

$$\Rightarrow f''(1) = -10 \Rightarrow \text{HP}$$

$$\Rightarrow f''(3) = 90 \Rightarrow \text{TP}$$

$$\Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow \text{HP}(1|2)$$

$$\Rightarrow f(3) = -26 \Rightarrow \text{TP}(3|-26)$$