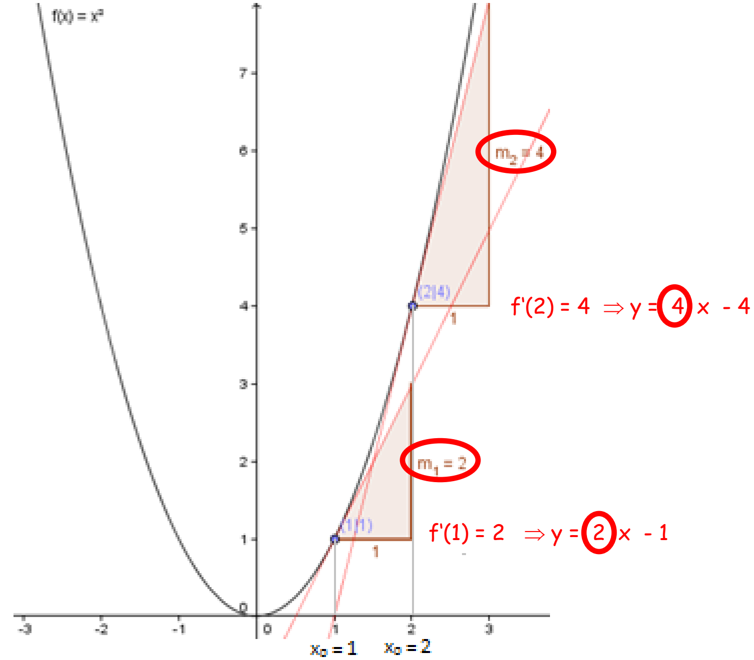
Abiturvorbereitung Mathematik
Analysis

Ableitung

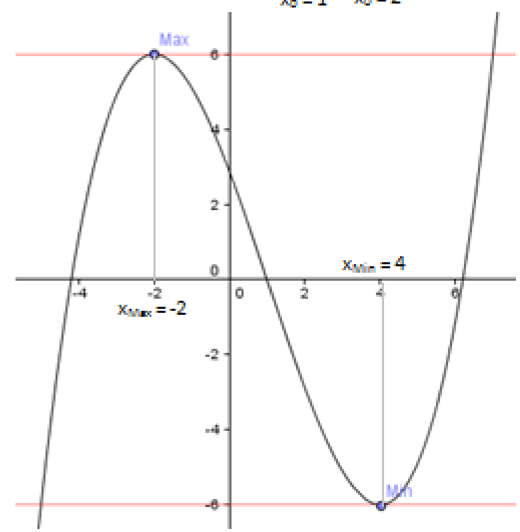
<u>Ableitung einer Funktion</u>

Geometrische Entsprechung:



Die Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0
$\Rightarrow f'(x_0)$
gibt die Tangentensteigung am Punkt $(x_0|y_0)$ an

Spezialfall:



Steigung an einem Extremwert = 0
$\Rightarrow f'(x_{Max}) = 0$
$\Rightarrow f'(x_{Min}) = 0$

Ableitungsregeln

Allgemeine Ableitungsregeln:

Summenregel: $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$

Faktorregel: $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$

Produktregel: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$ **(LK)**

Kettenregel: $u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Umkehrregel: $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$ **(LK)** Bedingung: $f(x_0)$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$

Spezielle Ableitungsregeln:

Konstantenregel: $(a)' = 0$ $a \in \Re$

Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

→ Reziprokenregel: $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-1-1} = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ Spezialfall für $n = (-1)$

→ Wurzelregel: $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2(\sqrt{x})}$ Spezialfall für $n = \frac{1}{2}$

Weitere Ableitungsregeln s. Formelsammlung

Integrale

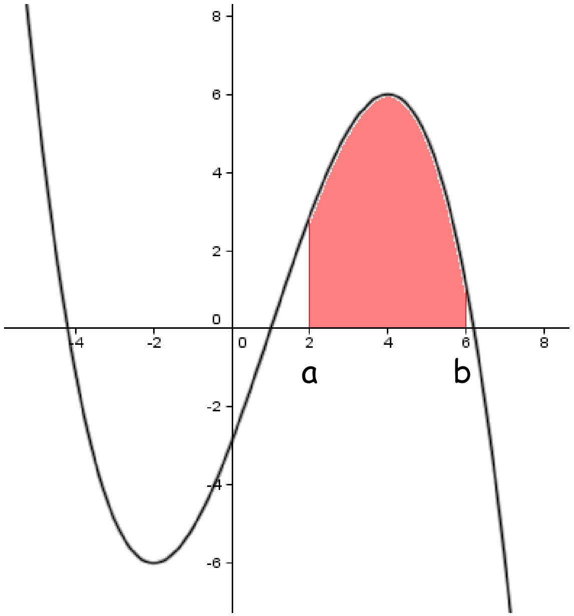
Integral einer Funktion

Geometrische Entsprechung:

Die Integral einer Funktion in den Grenzen a und b

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$

entspricht dem Flächeninhalt der Fläche, die zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse liegt.



Stammfunktion

$F'(x) = f(x)$

Unbestimmtes Integral (Menge aller Stammfunktionen)

$\int f(x)\,dx = [F(x)] + C \qquad (C \in \mathbb{R})$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Integrationsregeln

Allgemeine Integrationsregeln:

Summenregel: $\int ((f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$

Faktorregel: $\int (a \cdot (f(x)) \, dx = a \cdot \int f(x) \, dx$

Null Integral: $\int_a^a f(x) \, dx = 0$

Integralabschnitte: $\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx$

Negatives Integral: $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$

Spezielle Integrationsregeln:

Potenzregel: $\int (x^n) \, dx = (\frac{1}{n+1}) \cdot x^{n+1}$

→ Wurzelregel: $\int (\sqrt{x}) \, dx = (x^{\frac{1}{2}}) \, dx = (\frac{1}{1+\frac{1}{2}}) \cdot x^{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3})$ Spezialfall für $n = \frac{1}{2}$

Reziprokenregel: $\int (\frac{1}{x}) \, dx = \ln |x| + C$

Weitere Integrationsregeln s. Formelsammlung

Spezielle Integrationsmethoden

Produktintegration (LK)

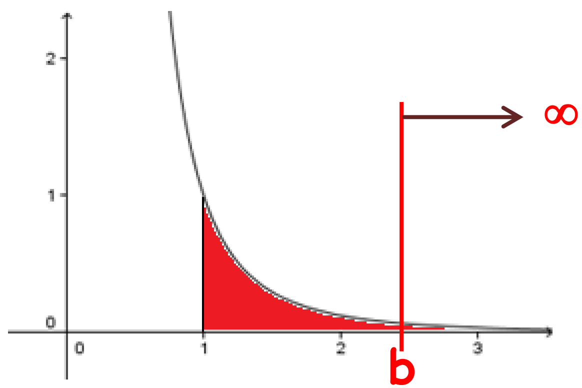
$$\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

Uneigentliche Integrale (LK)

Typ 1: Integral über einem unbeschränkten Intervall

Lösung:

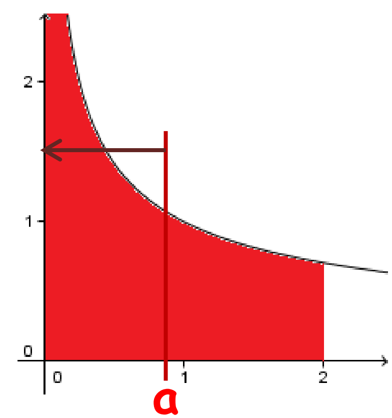
1. Berechnung des Flächeninhalts in Anhängigkeit der variablen Integrationsgrenze b
2. Grenzwertbestimmung für $b \rightarrow \infty$



Typ 2: Integral einer unbeschränkten Funktion (an Integrationsgrenze nicht definiert)

Lösung:

1. Berechnung des Flächeninhalts in Anhängigkeit der variablen Integrationsgrenze a
2. Grenzwertbestimmung für $a \rightarrow$ Integrationsgrenze



Spezielle Integrationsmethoden

Integration durch Substitution:

Lineare Substitution: $\int (f(ax + b)\, dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + C$

Nichtlineare Substitution: **(LK)**

Typ 1: Integral der Gestalt $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$

Man substituiert $g(x) = z$ und erhält das Integral $\int f(z)\, dz$.
Ist $F(z)$ Stammfunktion von $f(z)$, dann ergibt sich nach Rücksubstitution im Ergebnis $F(g(x))$ als Stammfunktion des Ausgangsintegranden.

Typ 2: Allgemeines Integral

Lösungsansatz durch Versuch mittels Substitution von x durch einen Term $t(z)$ das Integral $\int f(x)\, dx$ in das Integral $\int f(t(z)) \cdot t'(z)\, dz$ zu transformieren, welches im günstigen Fall einfacher zu lösen ist als das Ausgangsintegral.

Spezielle Integrationsmethoden

<u>Integration per Formansatz</u>

Grundidee: Die Ableitung einer Exponentialfunktion ist wieder eine Exponentialfunktion. Daher liegt die Vermutung nahe, dass die Ableitung einer Funktion, die eine Exponentialfunktion enthält, wieder so ähnlich aussieht wie die Funktion selbst. Damit würde auch eine Stammfunktion prinzipiell dieselbe Form aufweisen.

<u>Verfahren:</u>

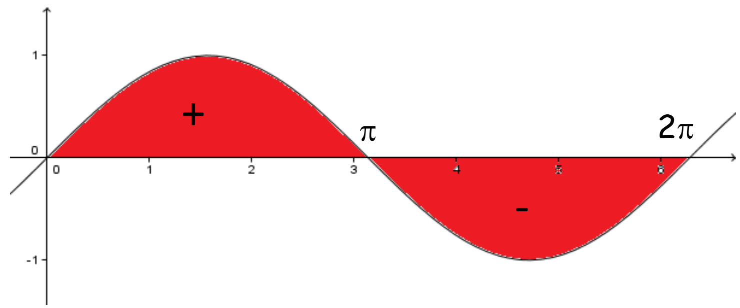
Gesucht ist eine Stammfunktion F(x) einer gegeben Funktion f(x)

1. Ansatz: F(x) ist ein Funktionsterm wie f(x) , aber mit Variablen statt Zahlen
2. Bilden von F'(x) => Vergleichen mit f(x)
3. Durch einen Koeffizientenvergleich erhält man ein Gleichungssystem mit den Variablen
4. Durch Lösen des Gleichungssystems erhält man die Werte der Variablen und somit die gesuchte Stammfunktion
5. Überprüfung durch Ableiten der Stammfunktion => muss f(x) ergeben

Flächenberechnung mit Integralen

Flächenberechnung vs. Integralberechnung

Beispiel: $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$



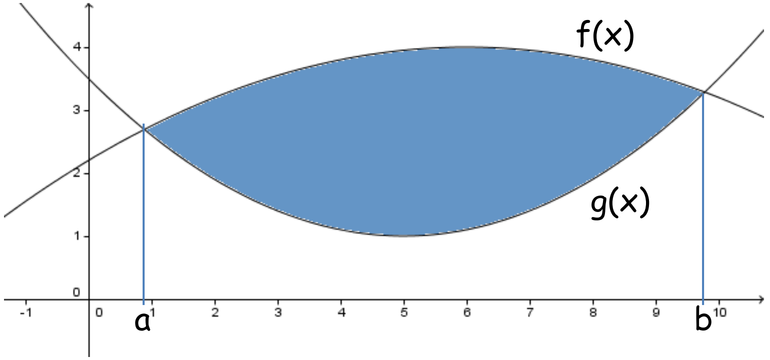
Integralberechnung: $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = 0$

Flächenberechnung: $F = \left| \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx \right| = 4$

Flächeninhalte zwischen Funktionsgraphen

$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

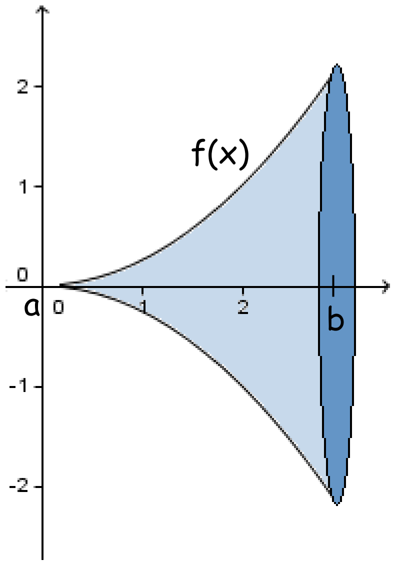
$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$



Volumenberechnung mit Integralen

Rotation um die x-Achse (LK)

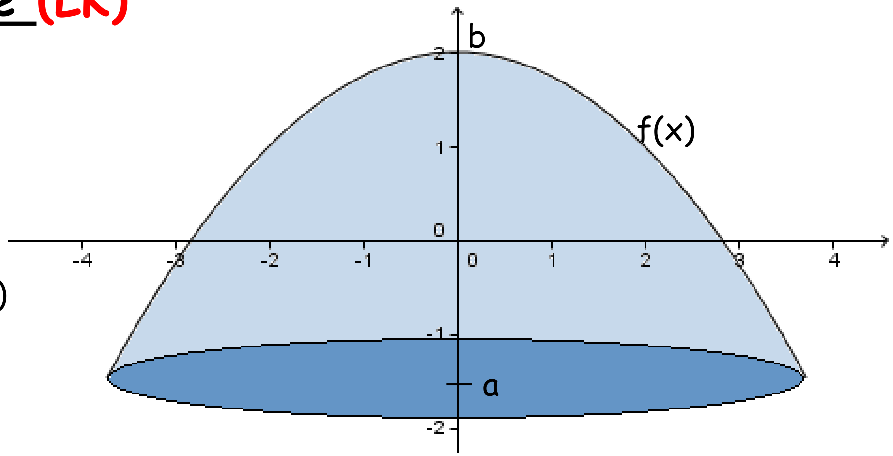
$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$



Rotation um die y-Achse (LK)

$$V = \pi \cdot \int_a^b (g(y))^2 dy$$

g(y) ist die Umkehrfunktion von f(x)



Definitionsbereich

Einschränkungen des Definitionsbereichs

Gebrochen-rationale Funktionen $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$

Division durch null nicht erlaubt

$\Rightarrow$ Definitionslücken in den Nullstellen des Nenners $N(x)$

Lösung:

Bestimmung der Definitionslücke durch Nullsetzen des Nenners $N(x) = 0$

Wurzelfunktionen $f(x) = \sqrt{R(x)}$

Negativer Radikand $R(x)$ einer gerade Wurzel nicht definiert

Lösung:

Bestimmung der Definitionsbereichs durch Ansatz $R(x) \geq 0$

Logarithmusfunktionen $f(x) = \log(T(x))$

Logarithmus nur für positive Argumente definiert

Lösung:

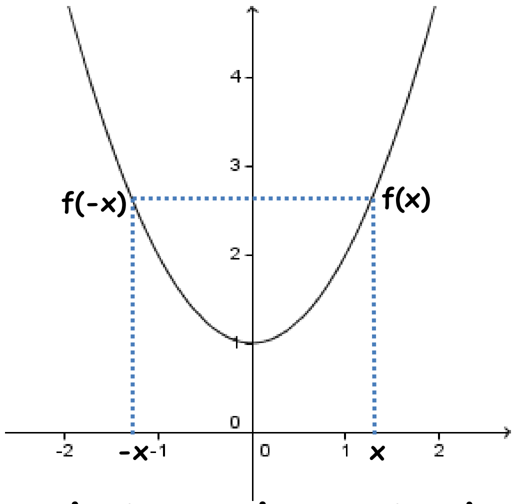
Bestimmung der Definitionsbereichs durch Ansatz $T(x) > 0$

Kurvendiskussion

1. **Definitionsbereich**
2. **Symmetrieeigenschaften**

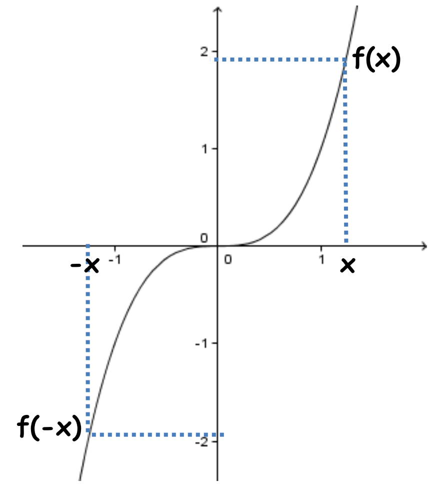
y-Achsensymmetrie:

$f(-x) = f(x)$



Punktsymmetrie zum Ursprung:

$f(-x) = -f(x)$



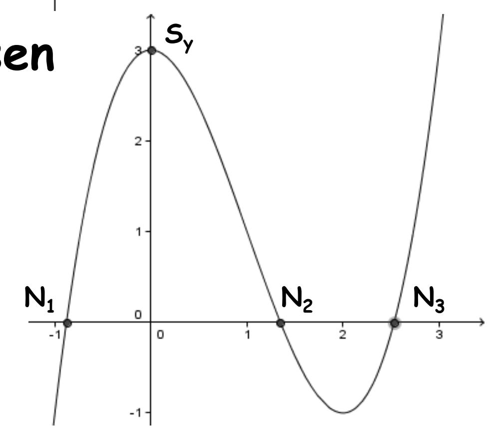
3. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

x-Achse (Nullstellen):

$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x|y)$

y-Achse (y-Achsenabschnitt):

$S_y\ (0|f(0))$

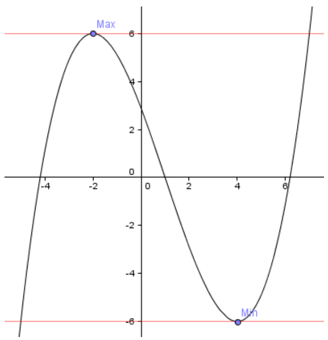


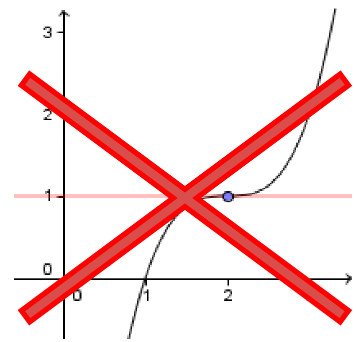
Kurvendiskussion

4. Extrempunkte

Notwendige Bedingung: **$f'(x) = 0$**

Hinreichende Bedingung: **$f''(x) \neq 0$**

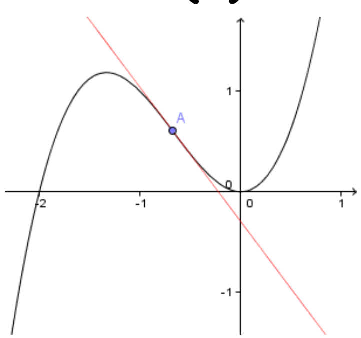


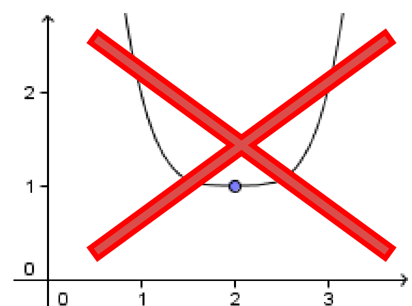


5. Wendepunkte

Notwendige Bedingung: **$f''(x) = 0$**

Hinreichende Bedingung: **$f'''(x) \neq 0$**





Vollständig: $\left.\begin{array}{l} f''(x_W) = f^{(2n-1)}(x_W) = 0 \\ f^{(n)}(x_W) \neq 0 \text{ mit } n>2 \text{ und } n \text{ ungerade} \end{array}\right\}$ Wendepunkt

Kurvendiskussion

6. Verhalten im Unendlichen

Bestimmung der Asymptoten

$$\lim_{x \to \infty} \mathbf{f(x)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \mathbf{f(x)}$$

<u>Lösung bei komplexen Funktionen:</u>
Identifizierung der dominanten Terme

7. Graph

Qualitative Zeichnung des Graphen auf Basis zuvor bestimmter geometrischer Eigenschaften

8. Monotonie

Gilt für alle $x \in$ Intervall I
$f'(x) < 0$, so ist $f(x)$ über I streng monoton fallend
$f'(x) > 0$, so ist $f(x)$ über I streng monoton wachsend

Rekonstruktion (Parameteraufgaben)

Parabel n-ter Ordnung

=> $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + e$

=> $f'(x) = nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + (n-2)cx^{n-3} + \ldots$

=> $f''(x) = n(n-1)ax^{n-2} + (n-1)(n-2)bx^{n-3} + (n-2)(n-3)cx^{n-4} + \ldots$

Achsensymmetrie => Nur gerade Exponenten

Punktsymmetrie => Nur ungerade Exponenten

Gegeben: Punkt $A(x_A|y_A)$

=> $f(x_A) = y_A = ax_A^n + bx_A^{n-1} + cx_A^{n-2} + \ldots + e$

Gegeben: Extrempunkt $E(x_E|y_E)$ … oder auch „hat Steigung 0" oder „berührt x-Achse"

=> Punkt E <u>und</u> $f'(x_E) = 0 = nax_E^{n-1} + (n-1)bx_E^{n-2} + (n-2)cx_E^{n-3} + \ldots$

Gegeben: Wendepunkt $W(x_W|y_W)$

=> Punkt W <u>und</u> $f''(x_W) = 0 = n(n-1)ax_W^{n-2} + (n-1)(n-2)bx_W^{n-3} + (n-2)(n-3)cx_W^{n-4} + \ldots$

Gegeben: Sattelpunkt $S(x_S|y_S)$

=> Punkt S <u>und</u> Extrempunkt S <u>und</u> Wendepunkt S

Gegeben: Steigung m bei x_m

=> $f'(x_m) = m$