edoceralph

Abiturvorbereitung Mathematik
Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) besteht aus einer Anzahl linearer Gleichungen.

(m,n)-LGS in Normalform

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Äquivalenzumformungen:

(1) Vertauschen von 2 Gleichungen

(2) Multiplikation einer Gleichung mit einer reellen Zahl $\neq 0$

(3) Addition (Subtraktion) einer Gleichung zu (von) einer anderen

Anzahl der Lösungen:

Es können drei Fälle auftreten:

- Fall 1: Das LGS ist unlösbar
- Fall 2: Das LGS hat genau eine Lösung
- Fall 3: Das LGS hat unendlich viele Lösungen

Lineare Gleichungssysteme

<u>Gaußsches Eliminationsverfahren</u>

Algorithmus zum Lösen von linearen Gleichungssystemen durch Anwendung von Äquivalenzumformungen

<u>Schritt 1</u>

(3,3)-LGS in Normalform

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Äquivalenzumformungen $\Rightarrow$

(3,3)-LGS in Stufenform

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

<u>Schritt 2</u>

Rückwärtseinsetzen: Ausgehend von der letzten Zeile werden die Variablen ausgerechnet und in die darüber liegende Zeile eingesetzt

$$x_3 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_1$$

$$L = \{x_1|x_2|x_3\}$$

Lineare Gleichungssysteme

Gauß-Jordan-Algorithmus (LK)

Erweiterung des Gaußschen Eliminationsverfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen durch Anwendung von Äquivalenz-umformungen

(3,3)-LGS in Normalform

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}}$$

$$\xrightarrow{\text{Äquivalenzumformungen}}$$

(3,3)-LGS in Diagonalform

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_2 &= b_2 \\ x_3 &= b_3 \end{aligned}}$$

$$L = \{x_1 | x_2 | x_3\}$$

Lineare Gleichungssysteme

Lösbarkeit

Nach Umformung des LGS in eine Stufenform kann dieses verschiedene Eigenschaften besitzen:

Widerspruch	Es existiert kein Widerspruch		
Wenigstens eine Gleichung stellt einen offensichtlichen Widerspruch dar	Es gibt weniger Variable als nichttriviale Zeilen	Die Anzahl der Variablen ist gleich der Anzahl der nichttrivialen Zeilen	Es gibt mehr Variable als nichttriviale Zeilen
Das LGS ist **unlösbar**.	Das LGS ist **eindeutig lösbar**.	Das LGS ist **eindeutig lösbar**.	Das LGS hat **unendlich viele Lösungen**.
	Lösung durch Rückwärtseinsetzen. Lösung muss für alle (!) Gleichungen gelten	Lösung durch Rückwärtseinsetzen	Lösung durch Festlegung freier Parameter

Lineare Gleichungssysteme

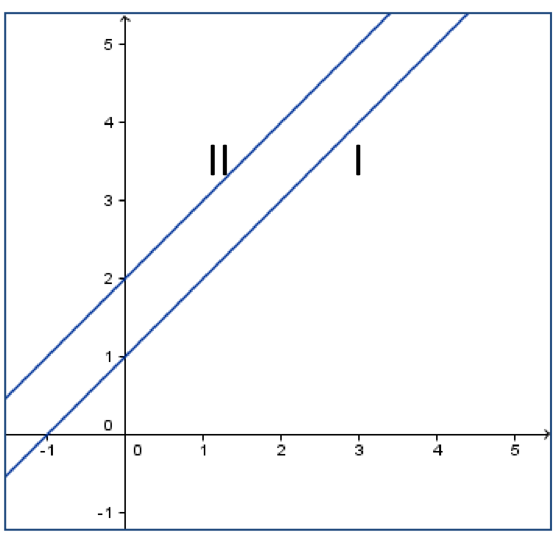
Veranschaulichung im 2D

Das LGS ist **unlösbar.**

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 4x - 4y = -4 \\ \text{II} & -6x + 6y = 12 \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & y = x + 1 \\ \text{II} & y = x + 2 \end{array}$$

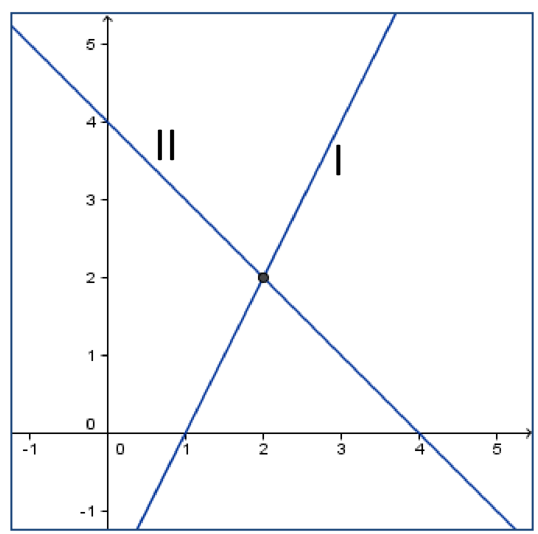


Das LGS ist **eindeutig lösbar.**

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 4x - 2y = 4 \\ \text{II} & 6x + 6y = 24 \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & y = 2x - 2 \\ \text{II} & y = -x + 4 \end{array}$$

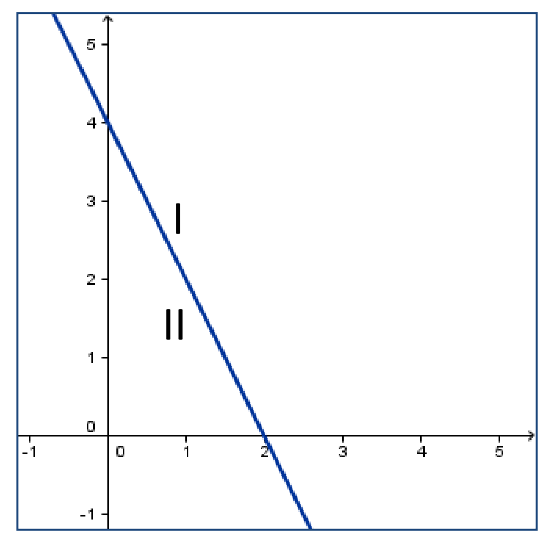


Das LGS hat **unendlich viele Lösungen.**

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 4x + 2y = 8 \\ \text{II} & -2x - y = -4 \end{array}$$

$\Downarrow$

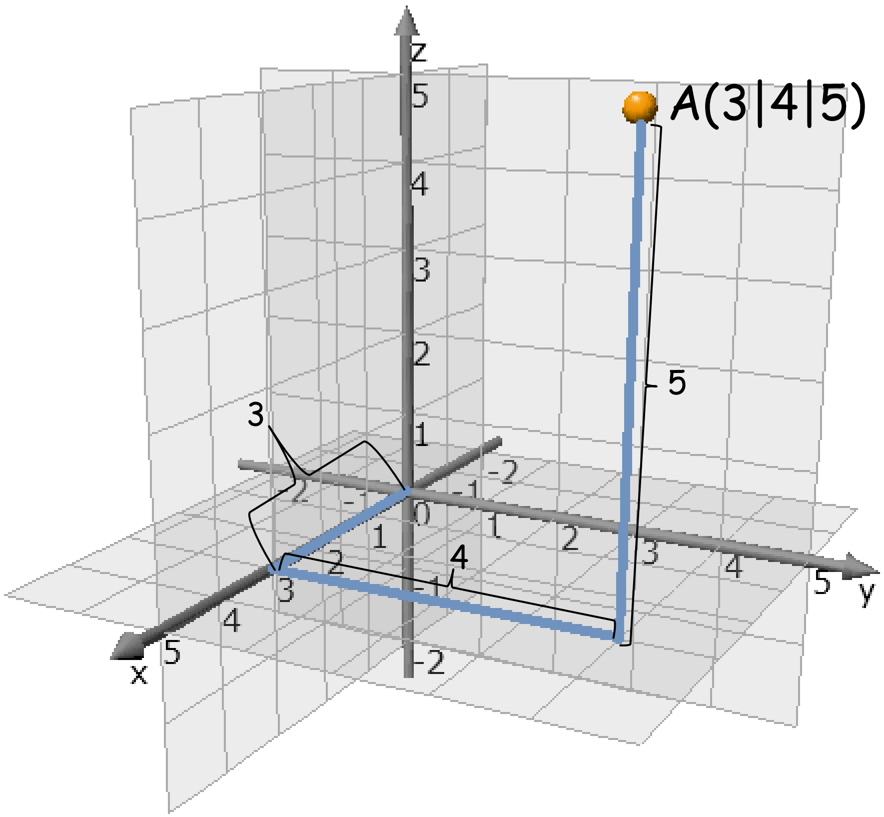
$$\begin{array}{ll} \text{I} & y = -2x + 4 \\ \text{II} & y = -2x + 4 \end{array}$$



Vektoren

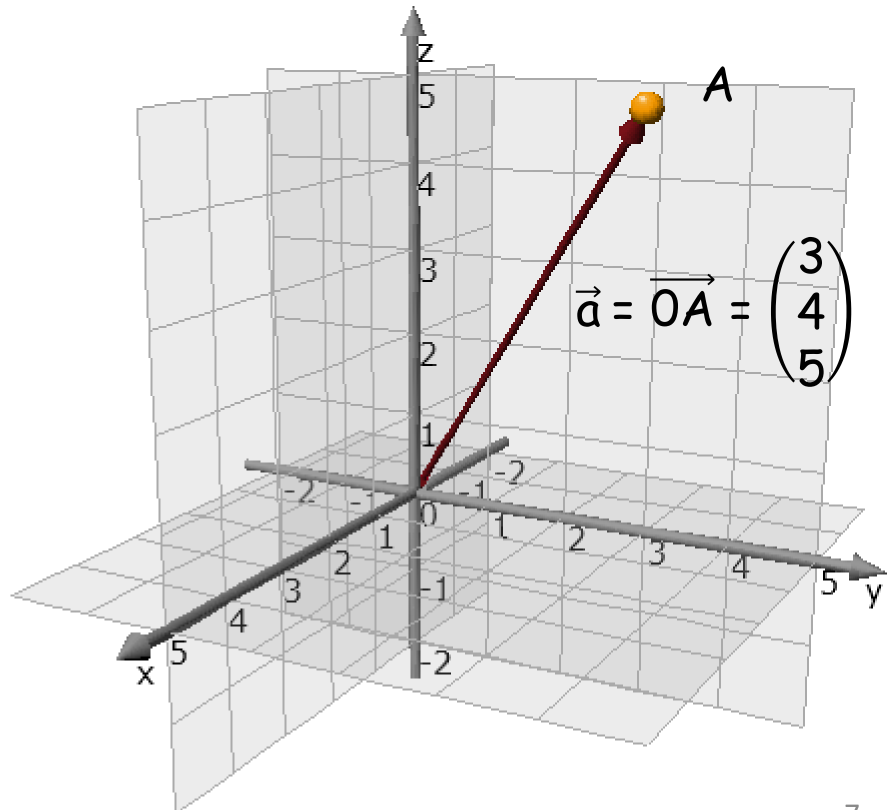
Punkt-Koordinaten

$A(a_1|a_2|a_3)$



Ortsvektor eins Punktes

$$\vec{a} = \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

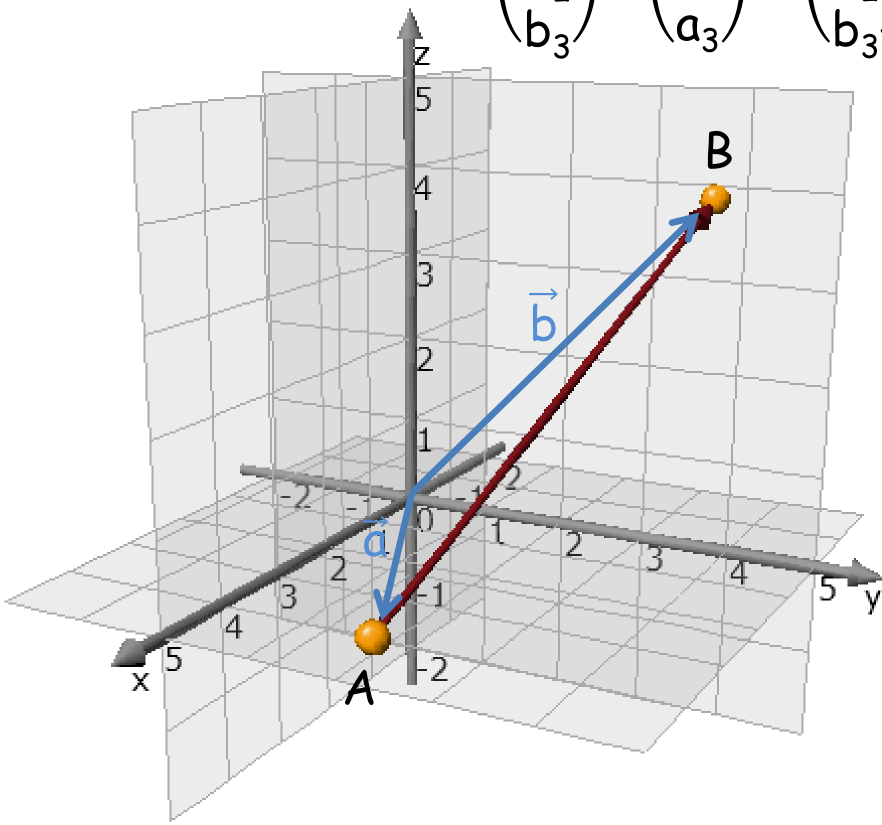


Vektoren

Zwei Punkte

Vektor zwischen zwei Punkten

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



Betrag eines Vektors

Satz des Pythagoras im 3D:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Abstand zweier Punkte

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \right|$$

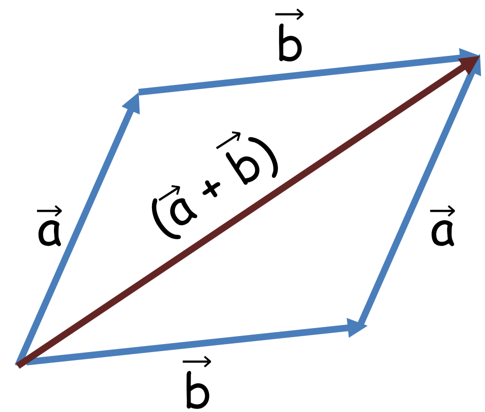
$$= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Vektoren

Rechenregeln

Addition

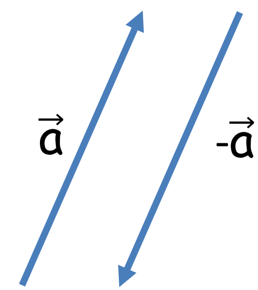
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Assoziativgesetz: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Nullvektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$



Gegenvektor $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

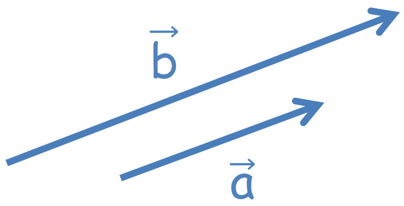
Skalarmultiplikation (mit einer reellen Zahl)

$$s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Distributivgesetz: $r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$

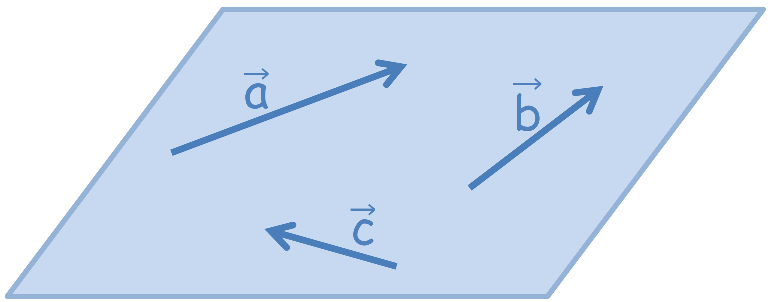
Vektoren

Kollinearität



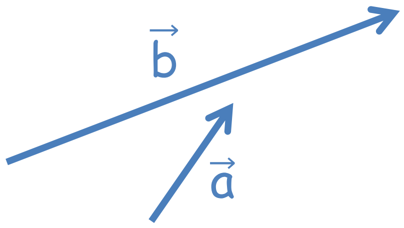
$\vec{b} = r \cdot \vec{a}$

Komplanarität

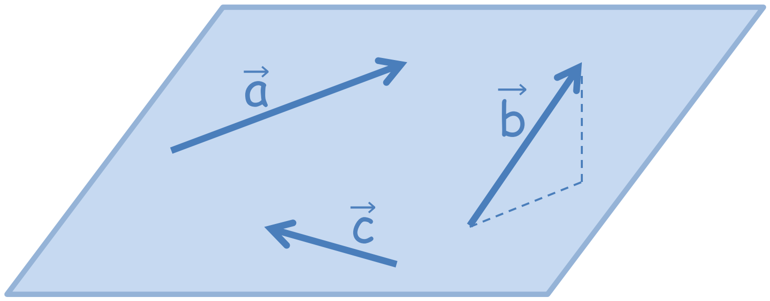


$\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

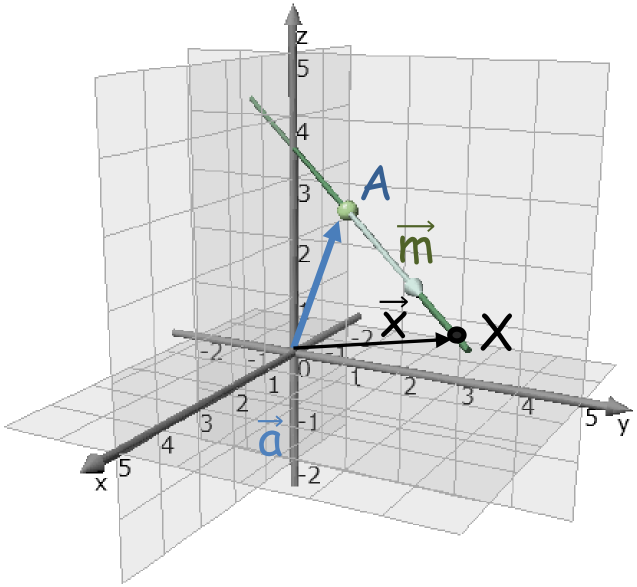
Nicht Kollinearität

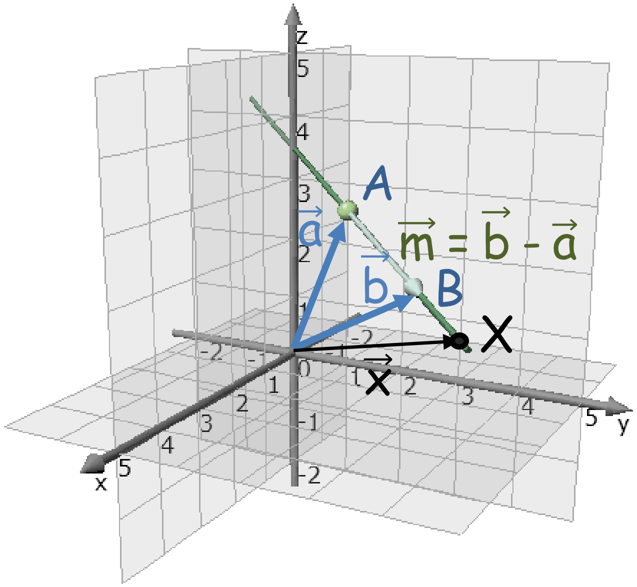


Nicht Komplanarität



Geraden





Parametergleichung

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

$$x = a_1 + r \cdot m_1$$
$$y = a_2 + r \cdot m_2$$
$$z = a_3 + r \cdot m_3$$

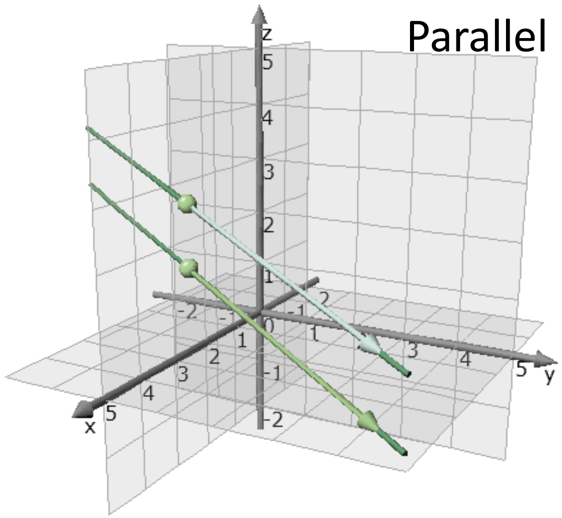
Zweipunktegleichung

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a})}$$

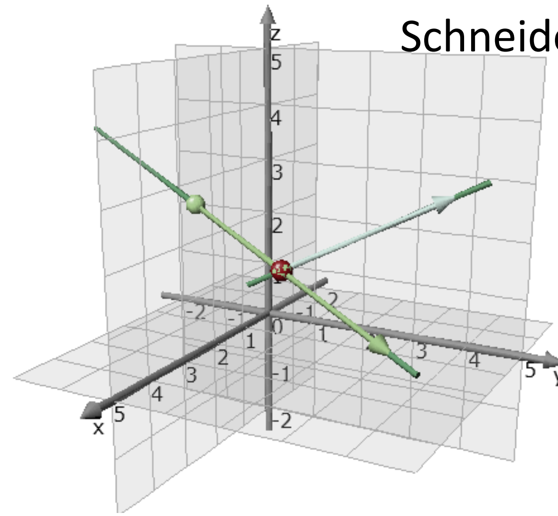
Geraden

Lagebeziehungen

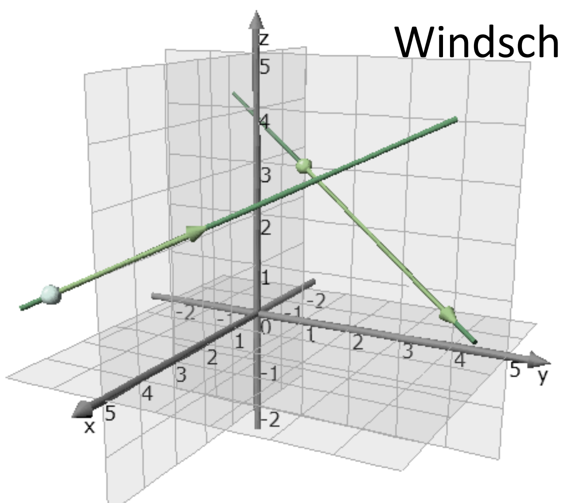
Parallel



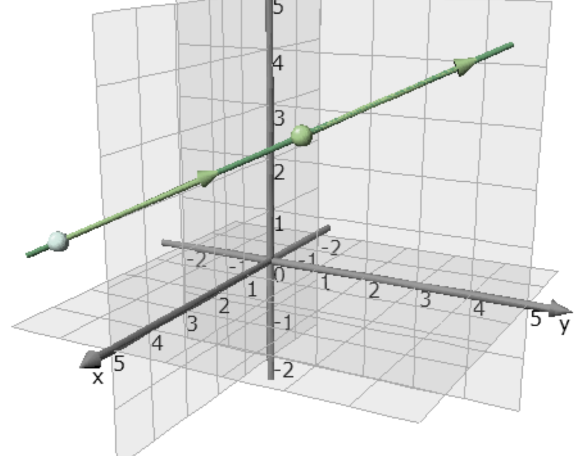
Schneidend



Windschief



Identisch

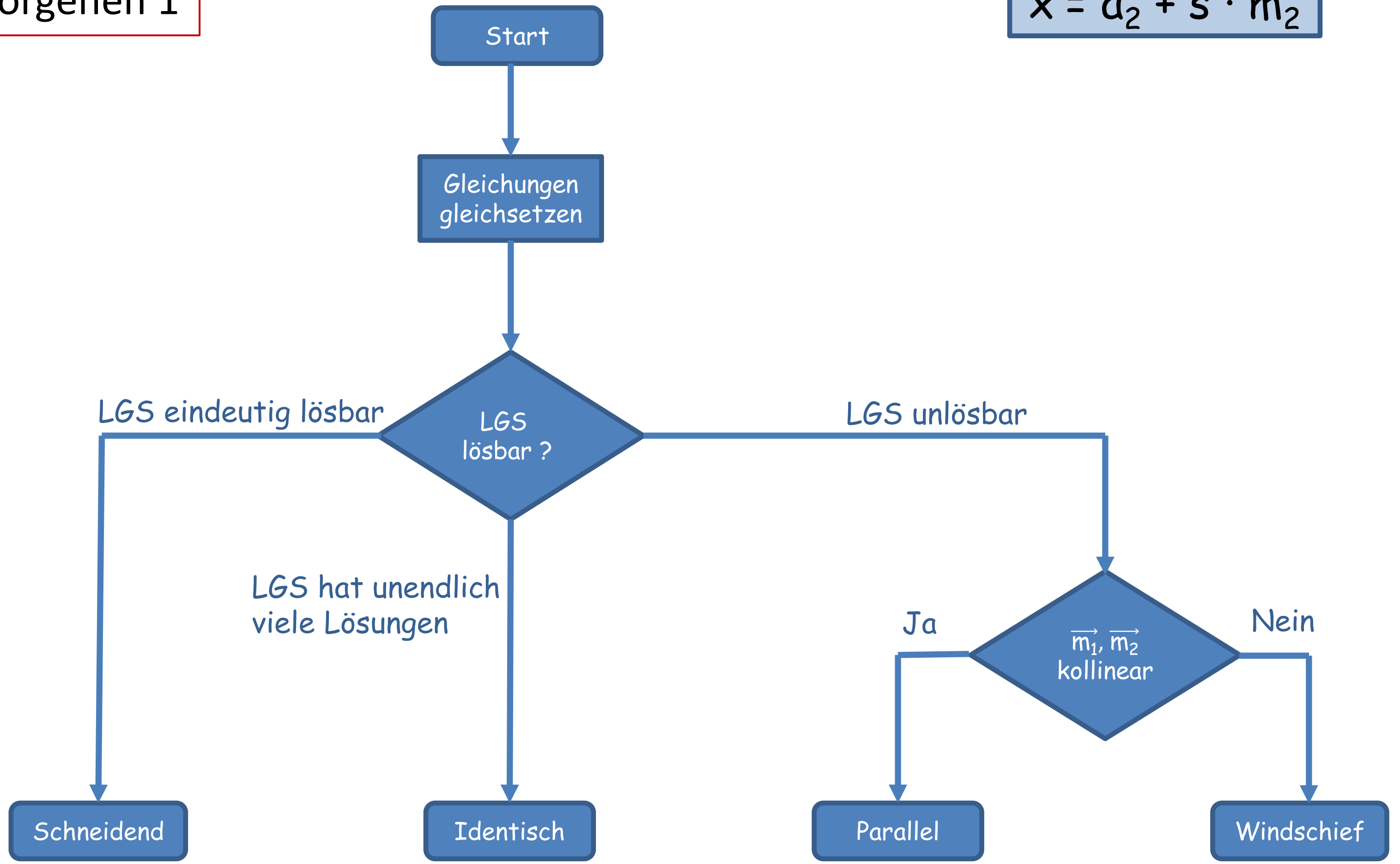


Geraden

Lagebeziehungen

Vorgehen 1

$$\vec{x} = \vec{a_1} + r \cdot \vec{m_1}$$
$$\vec{x} = \vec{a_2} + s \cdot \vec{m_2}$$

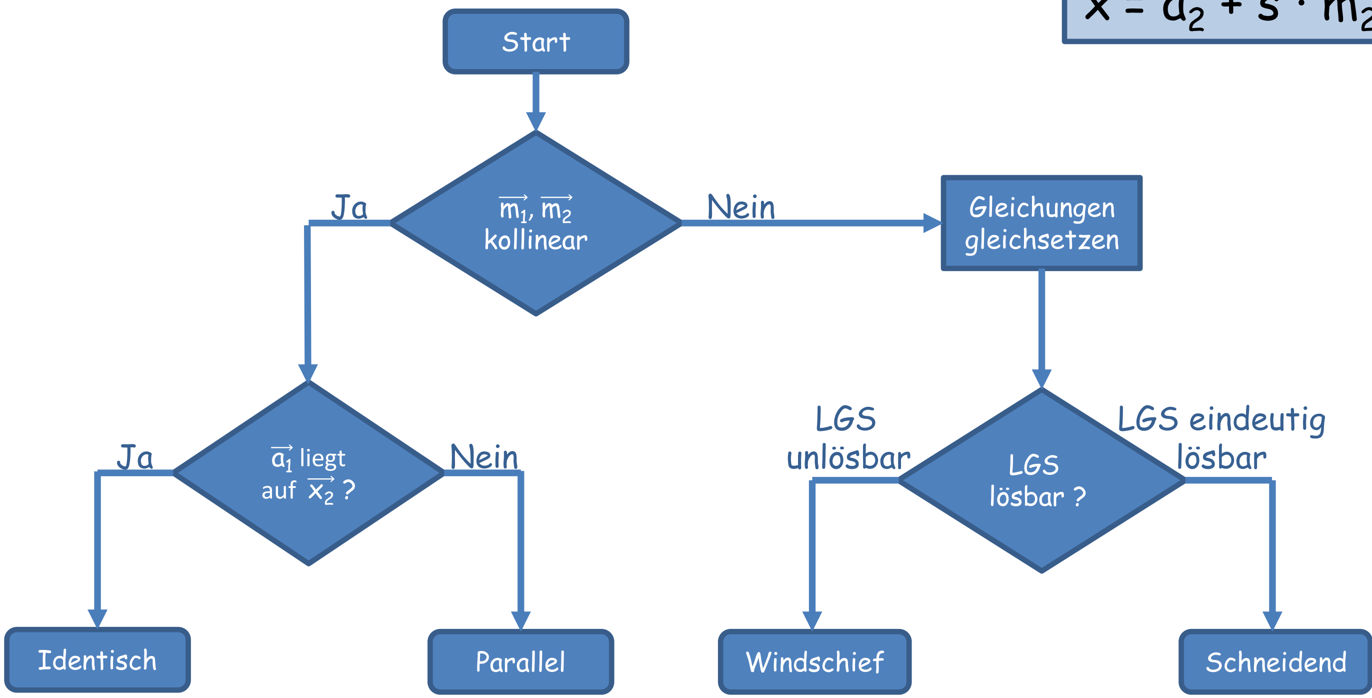


Geraden

Lagebeziehungen

Vorgehen 2

$$\vec{x} = \vec{a_1} + r \cdot \vec{m_1}$$
$$\vec{x} = \vec{a_2} + s \cdot \vec{m_2}$$



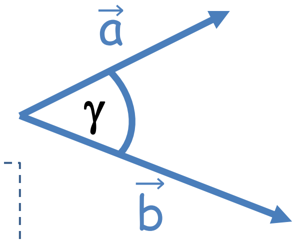
Skalarprodukt

Kosinusform

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Koordinatenform

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$



Rechenregeln

Kommutativgesetz: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

$(r\vec{a})\cdot\vec{b} = r(\vec{a}\cdot\vec{b})$ für $r \in \Re$

Distributivgesetz: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

Betrag eines Vektors

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

Orthogonalitätskriterium

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow \cos\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 90° \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

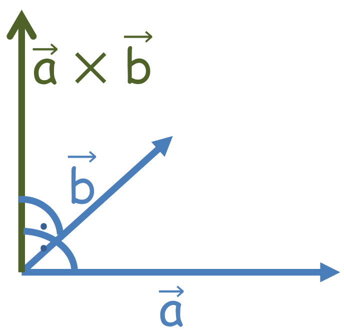
Schnittwinkel von Geraden

$$\cos\gamma = \frac{\vec{m_1}\cdot\vec{m_2}}{|\vec{m_1}|\cdot|\vec{m_2}|}$$

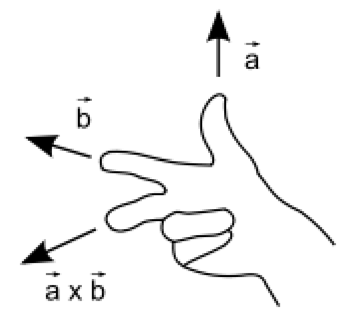
Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Eigenschaften

- $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
- Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden eine „Rechtssystem“.



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$



Rechenregeln

Anti-Kommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Assoziativgesetz: $(r \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ für $r \in \Re$

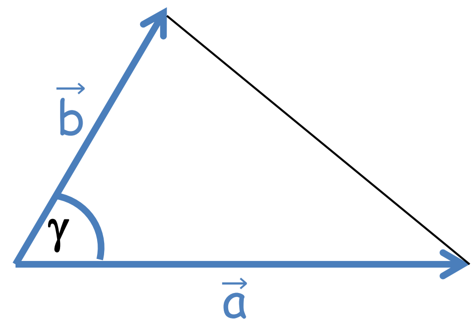
Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Anwendung Skalar-/Vektorprodukt

Skalarprodukt

Flächeninhalt eines Dreiecks

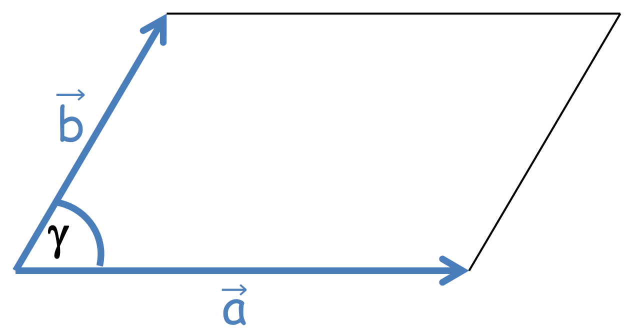
$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$



Vektorprodukt

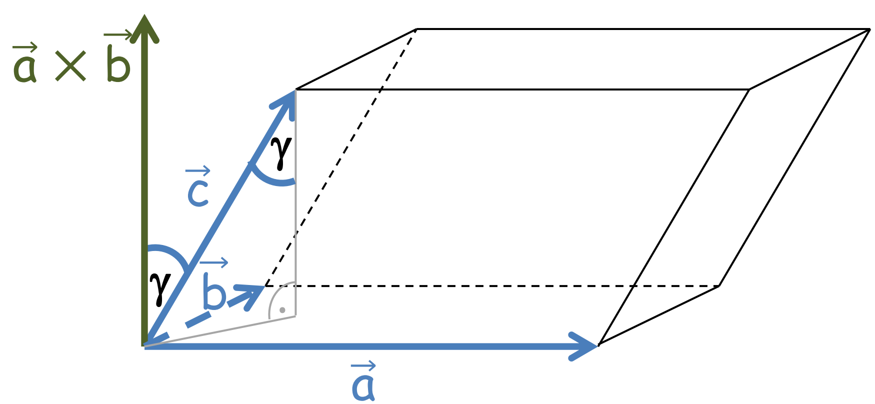
Flächeninhalt eines Parallelogramms

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\gamma$$



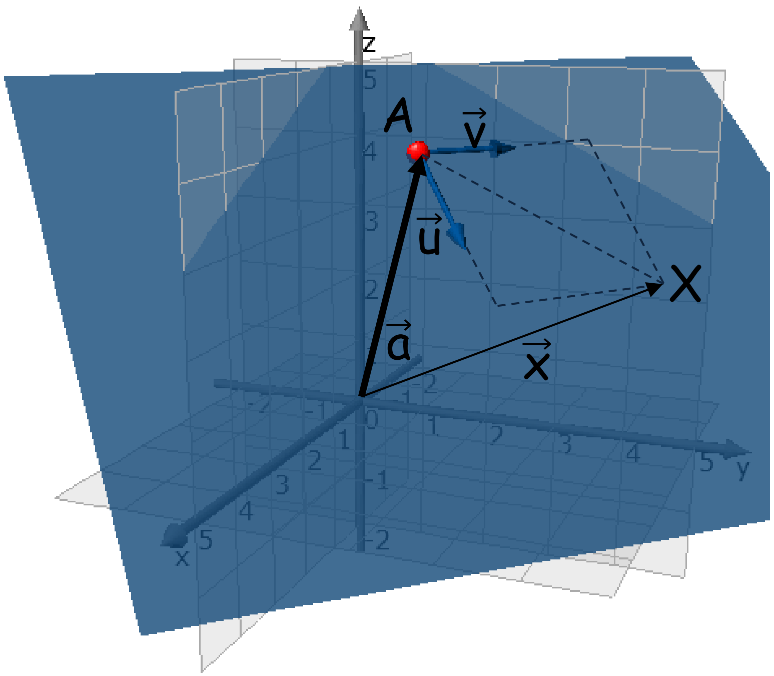
Volumen eines Spats

$$A = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$



Ebenen

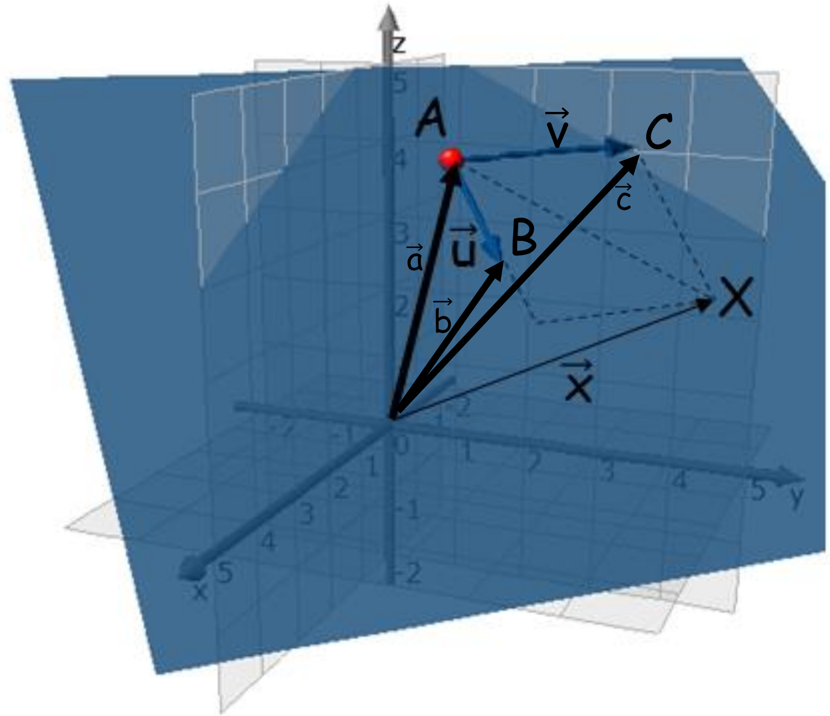
Parametergleichung



$$E:\ \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

$$x = a_1 + r \cdot u_1 + s \cdot v_1$$
$$y = a_2 + r \cdot u_2 + s \cdot v_2$$
$$z = a_3 + r \cdot u_3 + s \cdot v_3$$

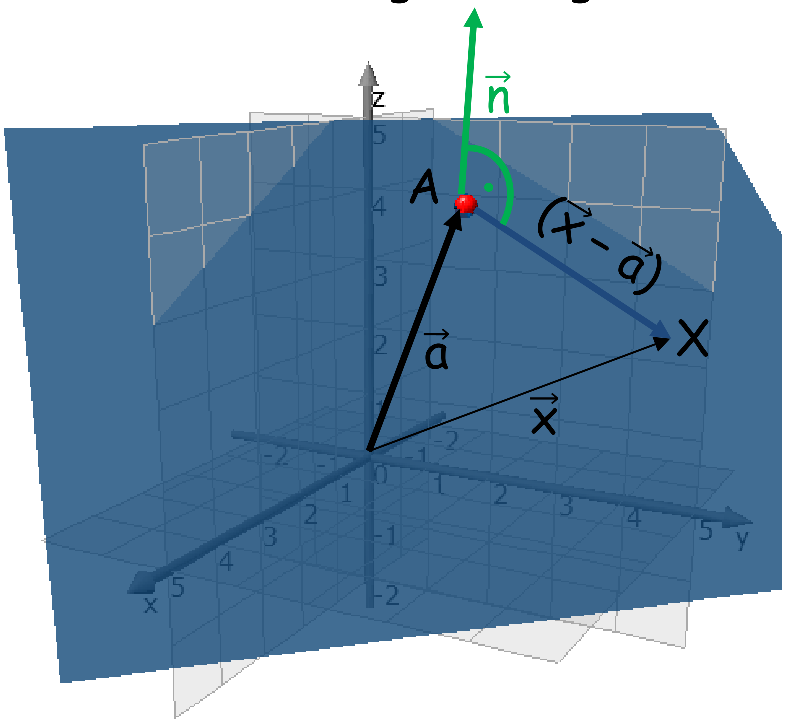
Dreipunktegleichung



$$E:\ \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \underbrace{\vec{u}}_{} + s \cdot \underbrace{\vec{v}}_{}$$
$$= \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

Ebenen

Normalengleichung



E: $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

Parametergleichung ➡ Normalengleichung

$$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

Vektorprodukt oder Normalen-Gleichungssystem (unterbestimmt)

Normalengleichung ➡ Parametergleichung

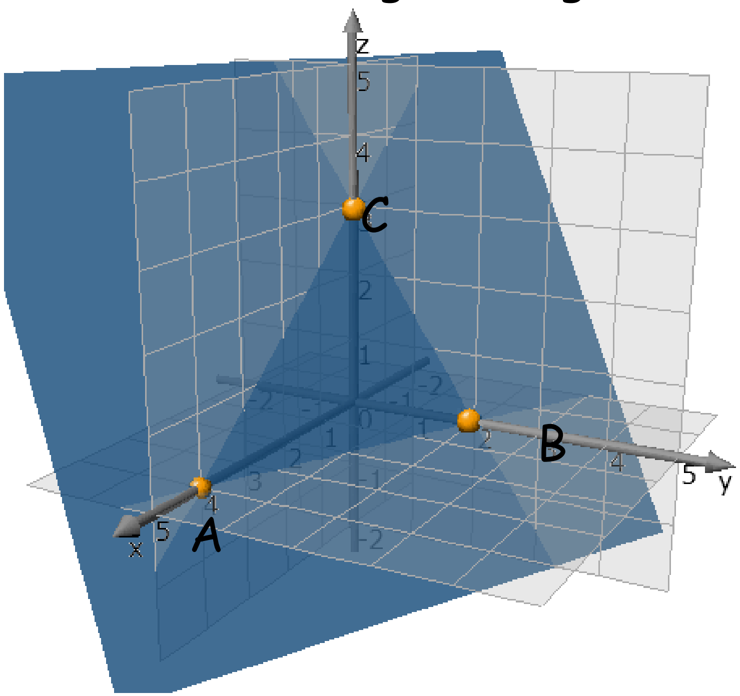
$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

Normalengleichungen

$$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

Ebenen

Koordinatengleichung



$$E: \quad ax + by + cz = d$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Achsenabschnittsgleichung

$$E: \quad \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

Normalengleichung ➡ Koordinatengleichung

$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \xrightarrow{\text{Ausmultiplizieren}} ax + by + cz = d$$

Koordinatengleichung ➡ Normalengleichung

$$ax + by + cz = d$$

Ausprobieren

$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

Lagebeziehungen

Lage von Punkt und Ebene

$P(p_1|p_2|p_3)$

$E: \quad \vec{x}_e = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$
Parametergleichung

$E: \quad (\vec{x}_e - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$
Normalengleichung

$E: \quad ax + by + cz = d$
Koordinatengleichung

Ansatz: Punktprobe

$$\vec{p} = \vec{x}_e$$

$$\vec{p} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

$$\vec{p} = \vec{x}_e$$

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$x = p_1$$
$$y = p_2$$
$$z = p_3$$

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 = d$$

Bedingungen für Punkt in Ebene:

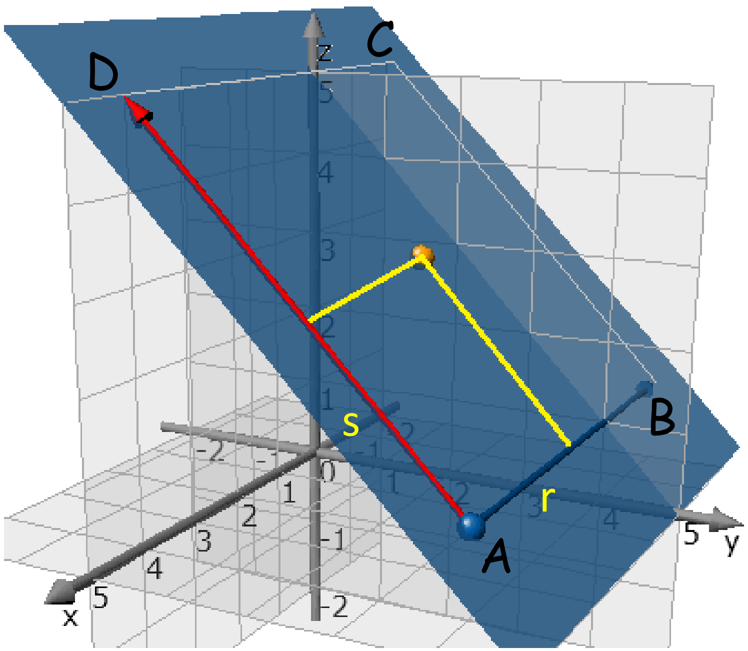
Eindeutige Werte für s und t

Gleichung stimmt

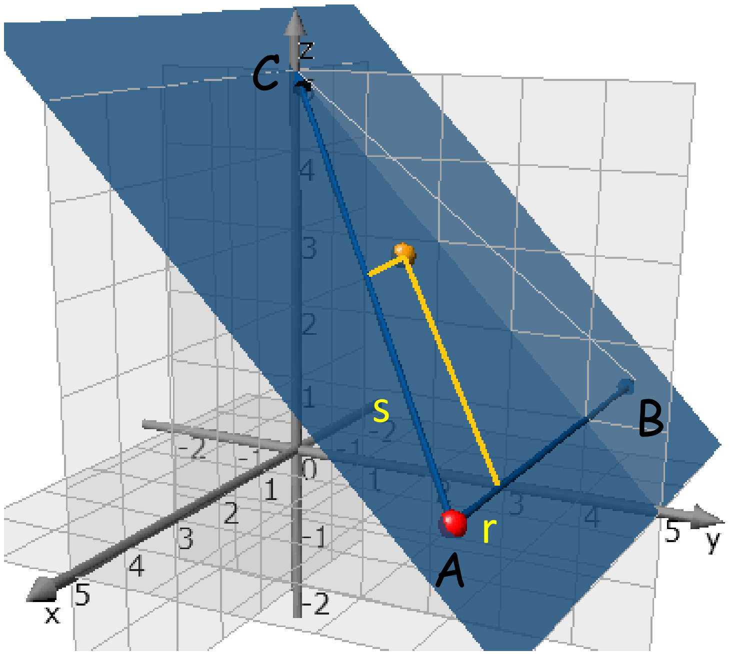
Gleichung stimmt

Lagebeziehungen

Lage von Punkt und Viereck



Lage von Punkt und Dreieck



Ansatz: $P(p_1|p_2|p_3)$ einsetzen in E: $\vec{x}_e = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

Bedingungen für Punkt in Viereck:

(1) $0 \leq r \leq 1$
(2) $0 \leq s \leq 1$

Bedingungen für Punkt in Dreieck:

(1) $0 \leq r \leq 1$
(2) $0 \leq s \leq 1$
(3) $0 \leq r + s \leq 1$

Lagebeziehungen

Lage von Gerade und Ebene

$g: \ \vec{x}_g = \vec{b} + r \cdot \vec{m}$

$E: \ \vec{x}_e = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$

Parametergleichung

$g: \ \vec{x}_g = \vec{b} + r \cdot \vec{m}$

$E: \ (\vec{x}_e - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

Normalengleichung

$g: \ \vec{x}_g = \vec{b} + r \cdot \vec{m}$

$E: \ ax + by + cz = d$

Koordinatengleichung

Ansatz:

$\vec{x}_g = \vec{x}_e$

$$\Downarrow$$

$\vec{b} + r \cdot \vec{m} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$

$\vec{x}_g = \vec{x}_e$

$$\Downarrow$$

$(\vec{b} + r \cdot \vec{m} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

$x = b_1 + r \cdot m_1$

$y = b_2 + r \cdot m_2$

$z = b_3 + r \cdot m_3$

$ax + by + cz = d$

Bedingungen für Gerade schneidet Ebene:

Eindeutige Werte für r bzw. s und t	Eindeutiger Wert für r	Eindeutiger Wert für r

Bedingungen für Gerade || Ebene:

Widerspruch

Bedingungen für Gerade in Ebene:

Allgemein gültige Lösung

Lagebeziehungen

Lage von zwei Ebenen

E_1: $\vec{x}_{e1} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$

E_2: $\vec{x}_{e2} = \vec{b} + q \cdot \vec{l} + r \cdot \vec{m}$

Parametergleichung / Parametergleichung

E_1: $\vec{x}_{e1} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$

E_2: $ax + by + cz = d$

Parametergleichung / Koordinatengleichung

Möglicher Ansatz:

$$\vec{x}_{e1} = \vec{x}_{e2}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v} = \vec{b} + q \cdot \vec{l} + r \cdot \vec{m}$$

$$x = a_1 + s \cdot u_1 + t \cdot v_1$$
$$y = a_2 + s \cdot u_2 + t \cdot v_2$$
$$z = a_3 + s \cdot u_3 + t \cdot v_3$$

$$ax + by + cz = d$$

Bedingungen für Gerade schneidet Ebene:

Eindeutige Funktion für s(t), t(s), q(r) oder r(q)	Eindeutige Funktion s(t) oder t(s)

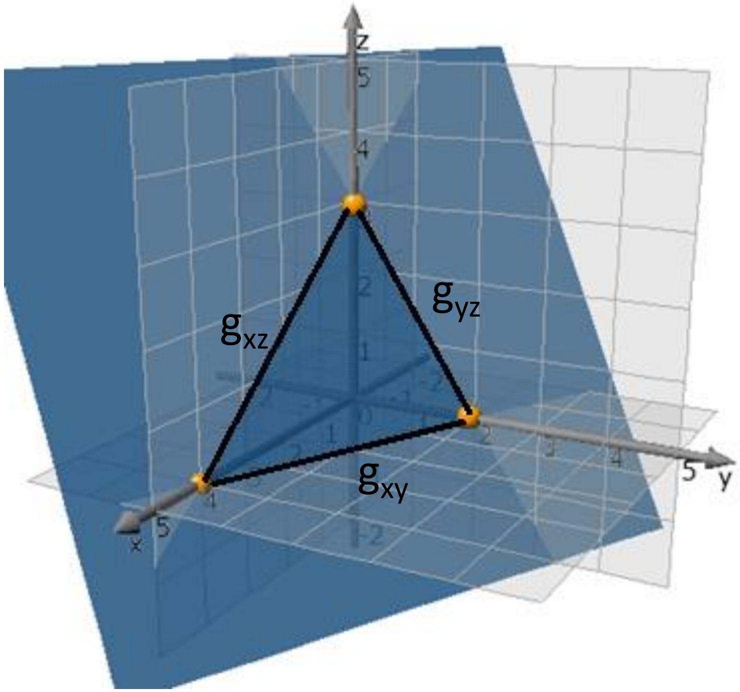
Bedingungen für parallele Ebenen:

Widerspruch

Bedingungen für identische Ebenen:

Allgemein gültige Lösung

Spurgeraden



Ansatz für g_{xy}: $z = 0$

Ansatz für g_{yz}: $x = 0$

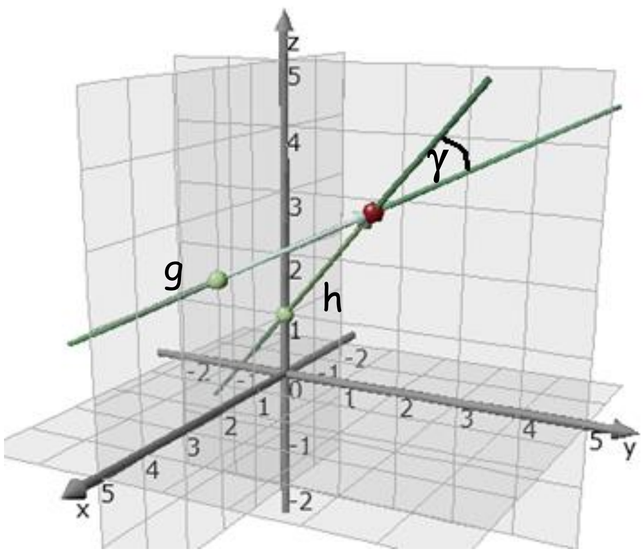
Ansatz für g_{xz}: $y = 0$

Schnittwinkel

Gerade / Gerade

$g: \; \vec{x} = \vec{a_1} + r \cdot \vec{m_1}$

$h: \; \vec{x} = \vec{a_2} + s \cdot \vec{m_2}$

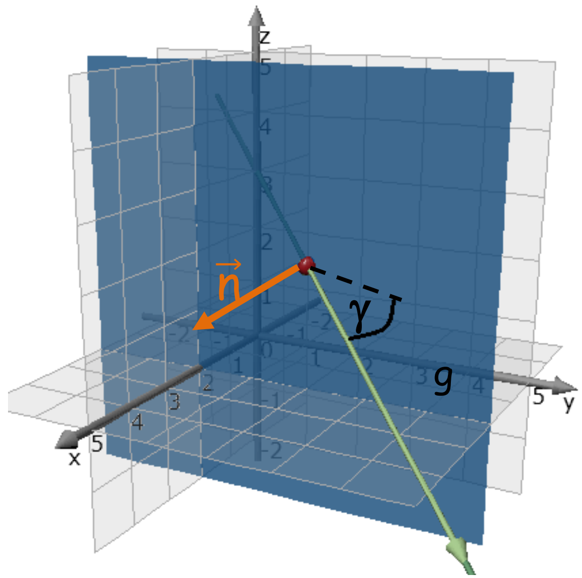


$$\cos\gamma = \frac{|\vec{m_1} \cdot \vec{m_2}|}{|\vec{m_1}| \cdot |\vec{m_2}|}$$

Gerade / Ebene

$g: \; \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m}$

$E: \; (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

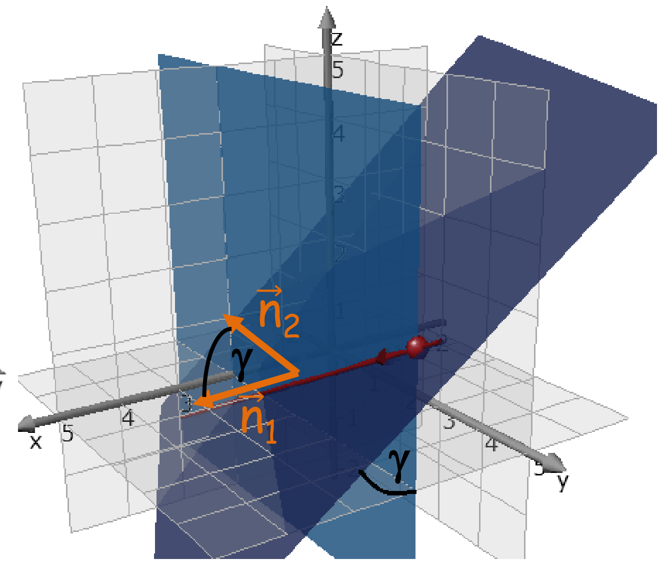


$$\sin\gamma = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|}$$

Ebene / Ebene

$E_1: \; (\vec{x} - \vec{a_1}) \cdot \vec{n_1} = 0$

$E_2: \; (\vec{x} - \vec{a_2}) \cdot \vec{n_2} = 0$

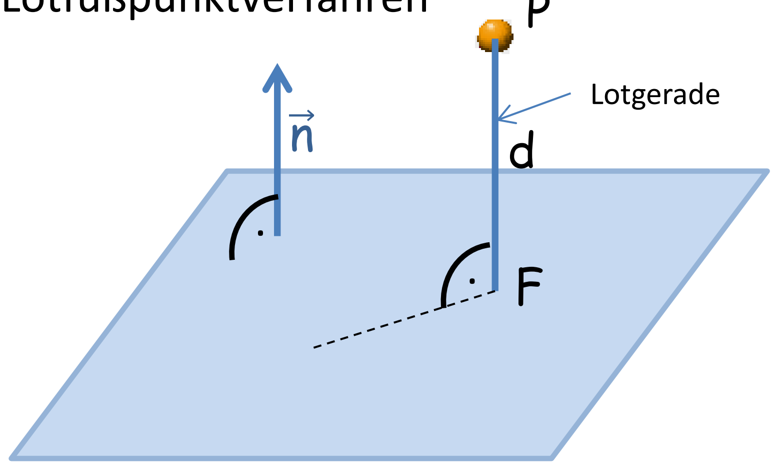


$$\cos\gamma = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$

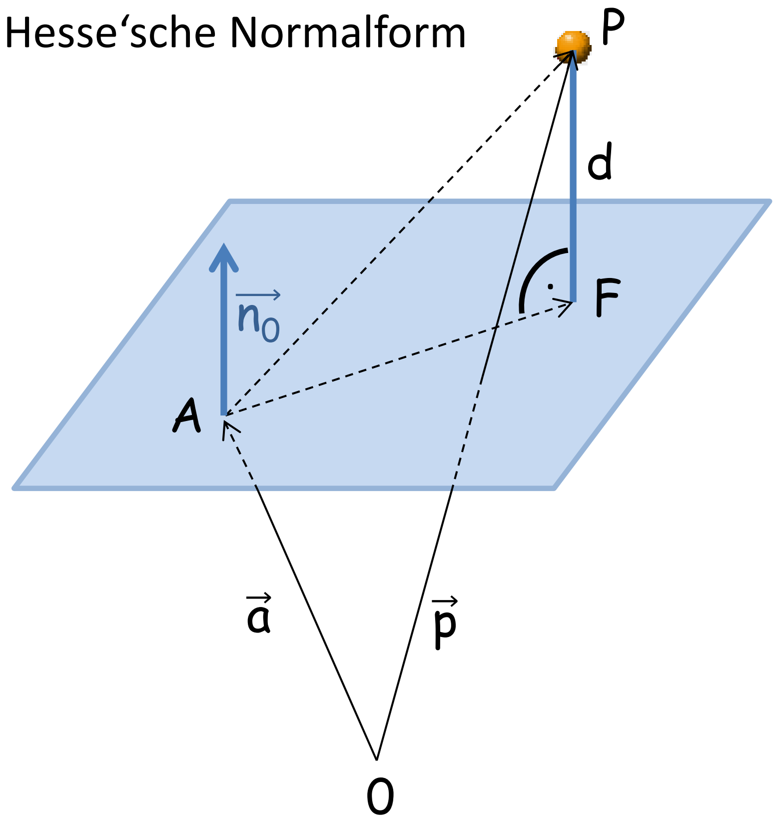
Abstandsberechnungen

<u>Abstand Punkt / Ebene</u>

Lotfußpunktverfahren



Hesse'sche Normalform

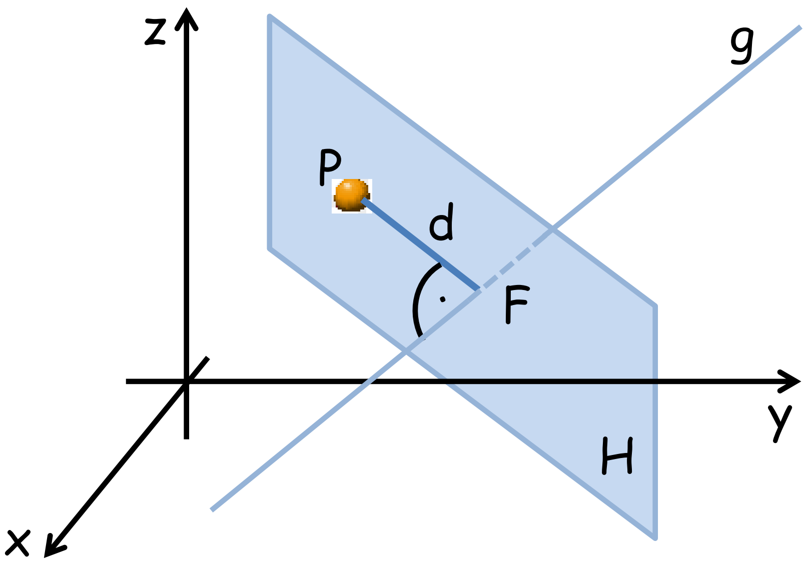


1. Bestimmung der Lotgerade mit Hilfe von $\vec{n}$ und Punkt P
2. Berechnung des Schnittpunkts F der Lotgerade mit der Ebene
3. Berechnung Abstand d = $|\overline{PF}|$

E: $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \overrightarrow{n_0} = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{d = |(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \overrightarrow{n_0}|}$

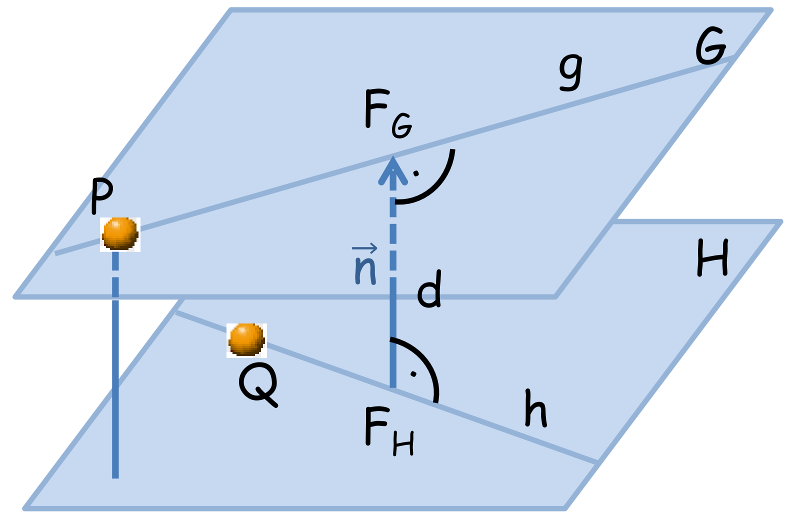
Abstandsberechnungen

Abstand Punkt / Gerade



1. Bestimmung einer Hilfsebene H senkrecht zu g (Richtungsvektor der Gerade entspricht Normalenvektor der Hilfsebene H.
2. Bestimmung Schnittpunkt g mit H => F.
3. Berechnung Abstand d = $|\overline{PF}|$.

Abstand windschiefer Geraden (LK)



g: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \overrightarrow{m_g}$ $\qquad$ $\vec{n} \perp \overrightarrow{m_g}$

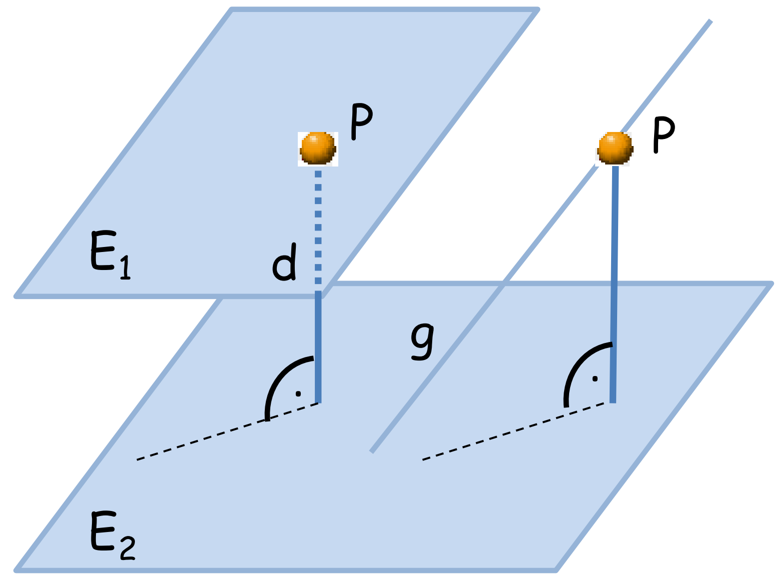
h: $\vec{x} = \vec{q} + r \cdot \overrightarrow{m_h}$ $\qquad$ $\vec{n} \perp \overrightarrow{m_h}$

$$\boxed{d = |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \overrightarrow{n_0}|}$$

Abstandsberechnungen

Abstand Ebene || Ebene

1. Überprüfung der Parallelität der Ebenen E_1 und E_2.
2. Berechnung des Abstands eines beliebigen Punktes auf E_1 von E_2.

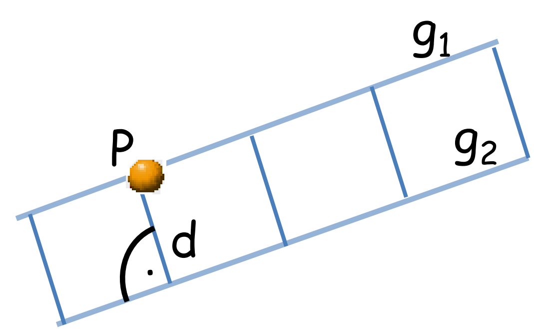


Abstand Ebene || Gerade

1. Überprüfung der Parallelität von Ebene und Gerade.
2. Berechnung des Abstands eines beliebigen Punktes der Gerade und der Ebene.

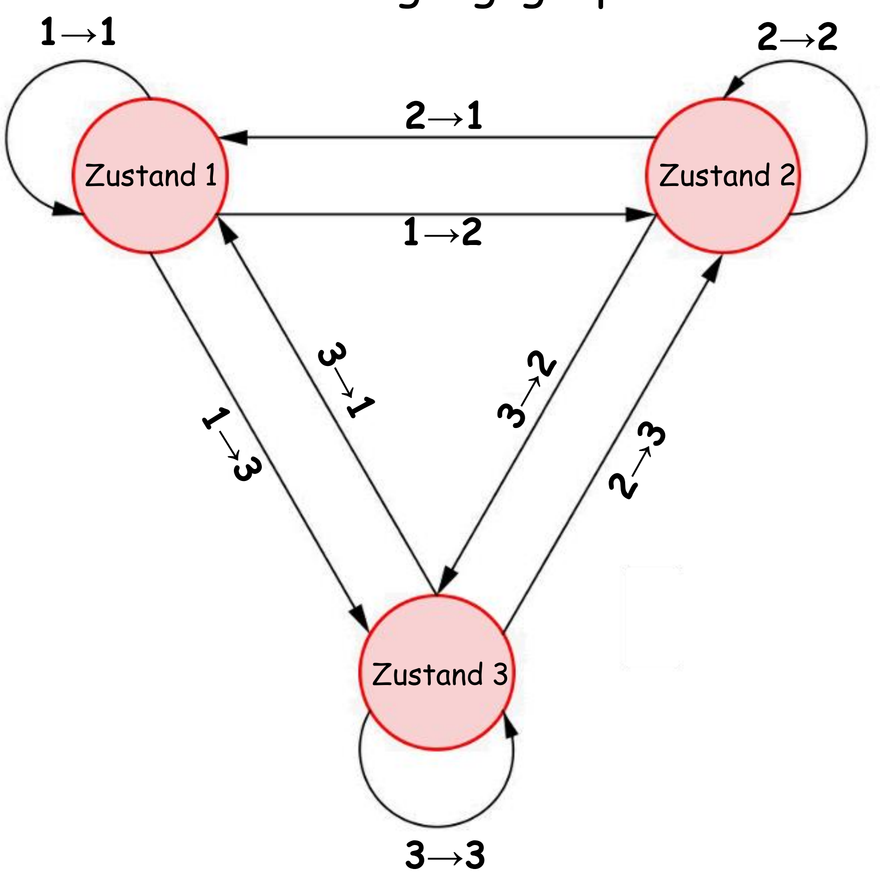
Abstand Gerade || Gerade

1. Überprüfung der Parallelität der Geraden g_1 und g_2.
2. Berechnung des Abstands eines beliebigen Punktes auf g_1 von g_2.



Austauschprozesse (LK)

Übergangsgraph



Übergangstabelle

von / nach	Zustand 1	Zustand 2	Zustand 3
Zustand 1	**1→1**	**1→2**	**1→3**
Zustand 2	**2→1**	**2→2**	**2→3**
Zustand 3	**3→1**	**3→2**	**3→3**
Summe	**1**	**1**	**1**

Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1\to 1 & 1\to 2 & 1\to 3 \\ 2\to 1 & 2\to 2 & 2\to 3 \\ 3\to 1 & 3\to 2 & 3\to 3 \end{pmatrix}$$

Austauschprozesse (LK)

Zustände (Systemzustände)
Zustände repräsentieren die verschiedenen möglichen Situationen oder Konfigurationen eines Systems.
Beispiel: Wetterzustände (Sonne, Regen, Schnee), Maschinenzustände (An, Aus, Wartung).
Zustände werden oft indiziert (z.B. x_1, x_2, x_3) oder als diskrete Kategorien beschrieben.
Zustände sind konzeptuelle Kategorien oder Positionen, die in der Übergangsmatrix und den Zustandsvektoren adressiert werden.

Zustandsvektor
Ein Zustandsvektor beschreibt zu einem bestimmten Zeitpunkt die Verteilung des Systems über die verschiedenen Zustände.
Jeder Eintrag des Vektors gibt den Anteil, die Wahrscheinlichkeit oder die Größe des Systems in einem bestimmten Zustand an.
Beispiel: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
Der Zustandsvektor beschreibt das Gesamtsystem zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Übergangsmatrix
Die Matrixelemente p_{ij} beschreiben die Wahrscheinlichkeit oder den Faktor, mit dem das System von Zustand i zu Zustand j übergeht. Sie geben also den spezifischen Übergang zwischen zwei einzelnen Zuständen an.
Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Ein Matrixelement beschreibt den spezifischen Übergang von Zustand i zu Zustand j.

Austauschprozesse (LK)

Zeitlich Vorwärtsrechnen

$$M \cdot \vec{x}_{vor} = \vec{x}'_{nach}$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Verteilung JETZT}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}}_{\text{Verteilung beim nächsten Mal}}$$

Zeitlich Rückwärtsrechnen

$$\vec{x}_{vor} = M^{-1} \cdot \vec{x}'_{nach}$$

Bestimmung der inversen Matrix mit TR

Austauschprozesse (LK)

Stabile Zustände (Fixvektoren)

Ein Fixvektor beschreibt einen stabilen Zustand, also einen Zustand, der sich durch Anwenden der Übergangsmatrix nicht mehr ändert. Dieser Zustand wird auch „stationärer“ Zustand genannt
Mathematisch betrachtet ist der Vektor $\vec{v}$ gesucht, für den gilt

$$M \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Dieser kann (wenn es ihn denn gibt) aus dem zugehörigen Gleichungssystem allgemein bestimmt werden. Dabei muss sich zeigen, dass zwei Gleichungen identisch sind. Andernfalls existiert kein Fixvektor.
In einem zweiten Schritt kann dann der zu einem gegebenen Zustandsvektor gehörige Fixvektor bestimmt werden (ggf. unter Anwendung einer Randbedingung).