

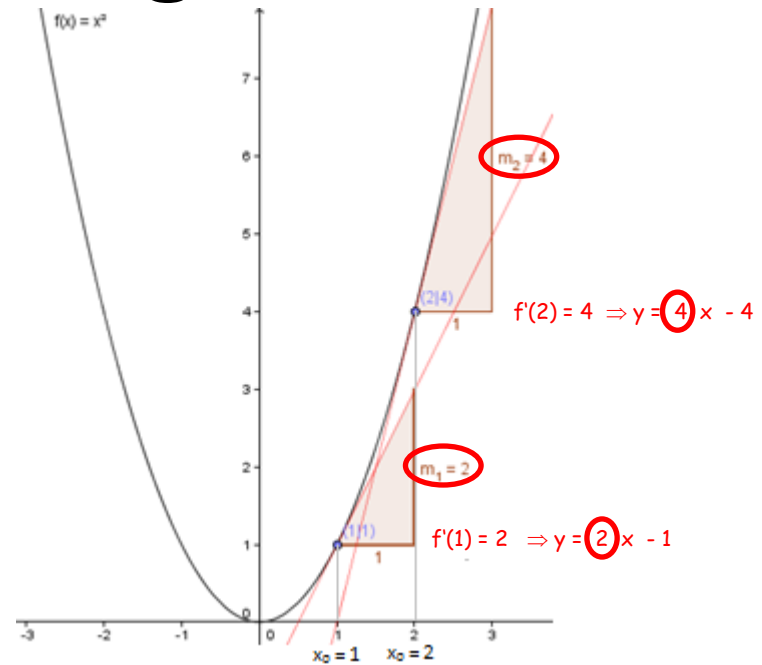
Abiturvorbereitung Mathematik Analysis

Ableitung

Ableitung einer Funktion

Geometrische Entsprechung:

Die Ableitung einer Funktion
an der Stelle x_0
 $\Rightarrow f'(x_0)$
gibt die Tangentensteigung
am Punkt $(x_0|y_0)$ an

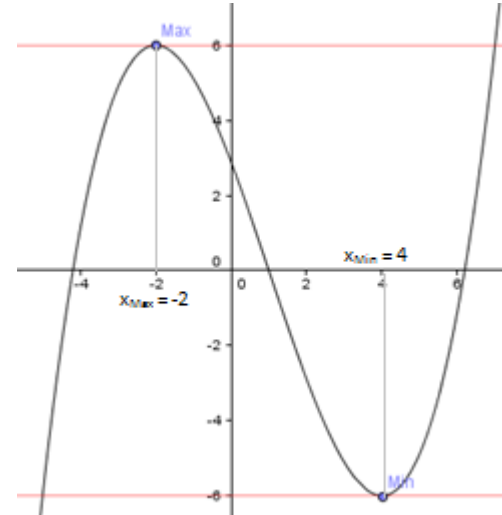


Spezialfall:

Steigung an einem Extremwert = 0

$$\Rightarrow f'(x_{\text{Max}}) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x_{\text{Min}}) = 0$$



Ableitungsregeln

Allgemeine Ableitungsregeln:

Summenregel: $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$

Faktorregel: $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$

Produktregel: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Kettenregel: $u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Spezielle Ableitungsregeln:

Konstantenregel: $(a)' = 0$ $a \in \mathbb{R}$

Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

→ Reziprokenregel: $(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-1-1} = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Spezialfall für $n = (-1)$

→ Wurzelregel: $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = (\frac{1}{2}) \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = (\frac{1}{2}) \cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2(\sqrt{x})}$

Spezialfall für $n = \frac{1}{2}$

Weitere Ableitungsregeln s. Formelsammlung

Integrale

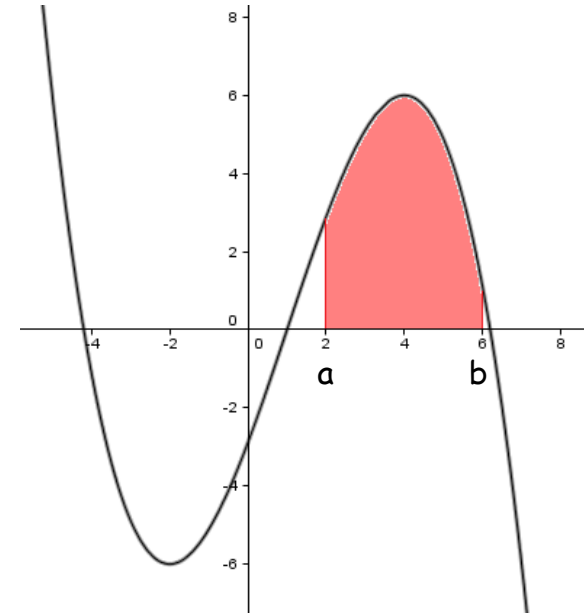
Integral einer Funktion

Geometrische Entsprechung:

Die Integral einer Funktion in den Grenzen a und b

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

entspricht dem Flächeninhalt der Fläche, die zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse liegt.



Stammfunktion

$$F'(x) = f(x)$$

Unbestimmtes Integral (Menge aller Stammfunktionen)

$$\int f(x) dx = [F(x)] + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Integrationsregeln

Allgemeine Integrationsregeln:

Summenregel: $\int ((f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Faktorregel: $\int (a \cdot (f(x))) dx = a \cdot \int f(x) dx$

Null Integral: $\int_a^a f(x) dx = 0$

Integralabschnitte: $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

Negatives Integral: $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

Spezielle Integrationsregeln:

Potenzregel: $\int (x^n) dx = \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot x^{n+1}$

→ Wurzelregel: $\int (\sqrt{x}) dx = \int (x^{\frac{1}{2}}) dx = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) \cdot x^{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$ Spezialfall für $n = \frac{1}{2}$

Reziprokenregel: $\int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln |x| + C$

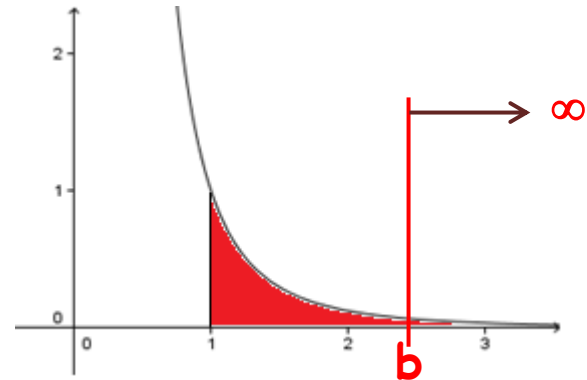
Spezielle Integrationsmethoden

Uneigentliche Integrale (LK)

Typ 1: Integral über einem unbeschränkten Intervall

Lösung:

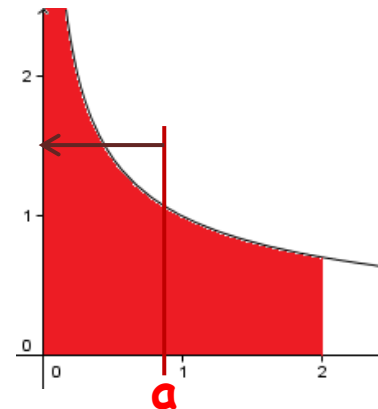
1. Berechnung des Flächeninhalts in Abhängigkeit der variablen Integrationsgrenze b
2. Grenzwertbestimmung für $b \rightarrow \infty$



Typ 2: Integral einer unbeschränkten Funktion (an Integrationsgrenze nicht definiert)

Lösung:

1. Berechnung des Flächeninhalts in Abhängigkeit der variablen Integrationsgrenze a
2. Grenzwertbestimmung für $a \rightarrow$ Integrationsgrenze



Lineare Substitution:

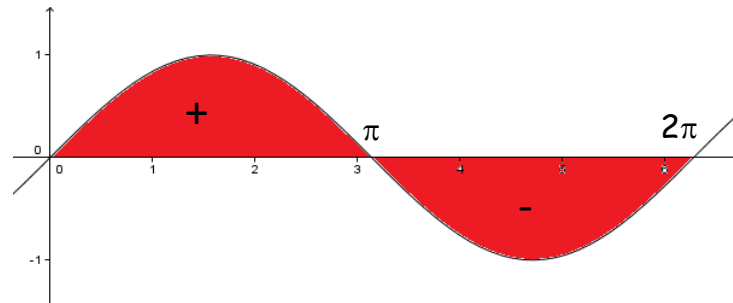
$$\int (f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + C$$

Umgekehrte Kettenregel (LK) $\int f'(x) e^{f(x)} \, dx = e^{f(x)} + C$

Flächenberechnung mit Integralen

Flächenberechnung vs. Integralberechnung

Beispiel: $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$

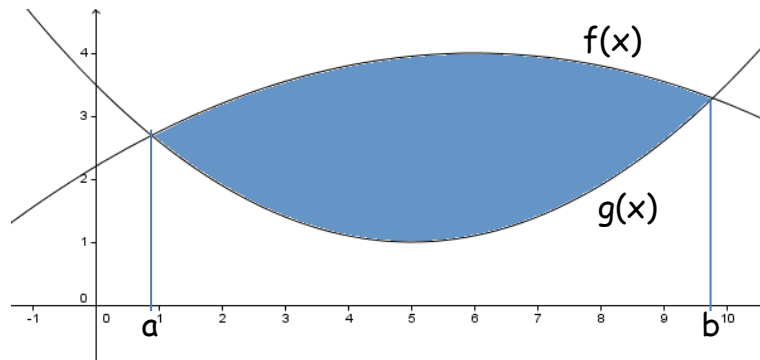


Integralberechnung: $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0$

Flächenberechnung: $F = \left| \int_0^{\pi} \sin(x) dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx \right| = 4$

Flächeninhalte zwischen Funktionsgraphen

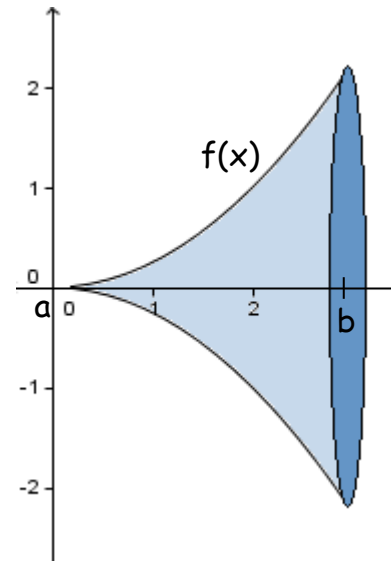
$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$



Volumenberechnung mit Integralen

Rotation um die x-Achse (LK)

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$



Definitionsbereich

Einschränkungen des Definitionsbereichs

Gebrochen-rationale Funktionen $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$

Division durch null nicht erlaubt

⇒ Definitionslücken in den Nullstellen des Nenners $N(x)$

Lösung:

Bestimmung der Definitionslücke durch Nullsetzen des Nenners $N(x) = 0$

Wurzelfunktionen $f(x) = \sqrt{R(x)}$

Negativer Radikand $R(x)$ einer gerade Wurzel nicht definiert

Lösung:

Bestimmung der Definitionsbereichs durch Ansatz $R(x) \geq 0$

Logarithmusfunktionen $f(x) = \log(T(x))$

Logarithmus nur für positive Argumente definiert

Lösung:

Bestimmung der Definitionsbereichs durch Ansatz $T(x) > 0$

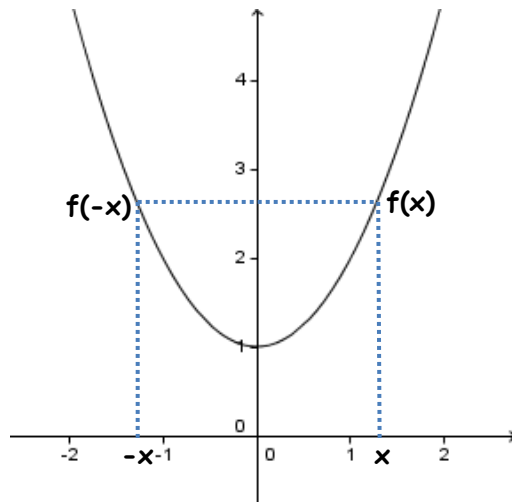
Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich

2. Symmetrieeigenschaften

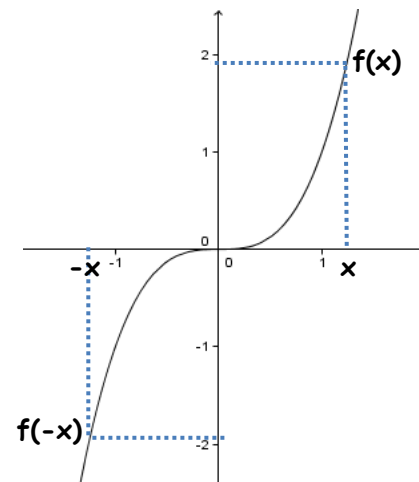
y-Achsensymmetrie:

$$f(-x) = f(x)$$



Punktsymmetrie zum Ursprung:

$$f(-x) = -f(x)$$



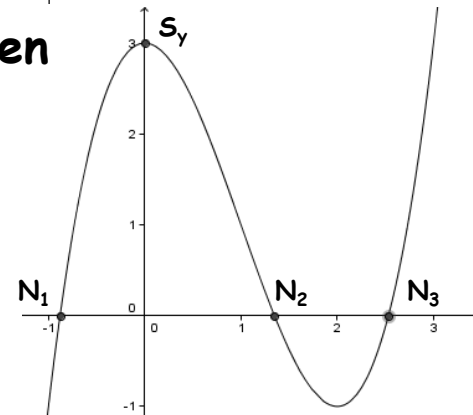
3. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

x-Achse (Nullstellen):

$$f(x) = 0 \Rightarrow N(x|y)$$

y-Achse (y-Achsenabschnitt):

$$S_y (0|f(0))$$

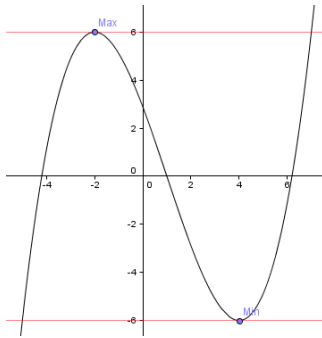


Kurvendiskussion

4. Extrempunkte

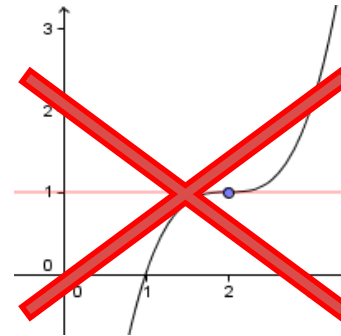
Notwendige Bedingung:

$$f'(x) = 0$$



Hinreichende Bedingung:

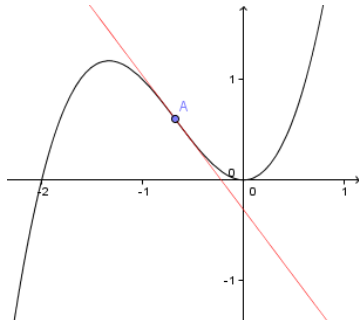
$$f''(x) \neq 0$$



5. Wendepunkte

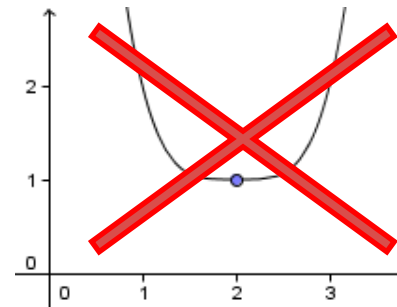
Notwendige Bedingung:

$$f''(x) = 0$$



Hinreichende Bedingung:

$$f'''(x) \neq 0$$



Vollständig: $f''(x_W) = f^{(2n-1)}(x_W) = 0$
 $f^{(n)}(x_W) \neq 0$ mit $n \geq 2$ und n ungerade } Wendepunkt ¹¹

Kurvendiskussion

6. Verhalten im Unendlichen

Bestimmung der Asymptoten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Lösung bei komplexen Funktionen:

Identifizierung der dominanten Terme

7. Graph

Qualitative Zeichnung des Graphen auf Basis zuvor bestimmter geometrischer Eigenschaften

8. Monotonie

Gilt für alle $x \in \text{Intervall } I$

$f'(x) < 0$, so ist $f(x)$ über I streng monoton fallend

$f'(x) > 0$, so ist $f(x)$ über I streng monoton wachsend

Rekonstruktion (Parameteraufgaben)

Parabel n-ter Ordnung

$$\Rightarrow f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + e$$

$$\Rightarrow f'(x) = nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + (n-2)cx^{n-3} + \dots$$

$$\Rightarrow f''(x) = n(n-1)ax^{n-2} + (n-1)(n-2)bx^{n-3} + (n-2)(n-3)cx^{n-4} + \dots$$

Achsensymmetrie $\Rightarrow$ Nur gerade Exponenten

Punktsymmetrie $\Rightarrow$ Nur ungerade Exponenten

Gegeben: Punkt $A(x_A|y_A)$

$$\Rightarrow f(x_A) = y_A = ax_A^n + bx_A^{n-1} + cx_A^{n-2} + \dots + e$$

Gegeben: Extrempunkt $E(x_E|y_E)$... oder auch „hat Steigung 0“ oder „berührt x-Achse“

$$\Rightarrow \text{Punkt } E \text{ und } f'(x_E) = 0 = nax_E^{n-1} + (n-1)bx_E^{n-2} + (n-2)cx_E^{n-3} + \dots$$

Gegeben: Wendepunkt $W(x_W|y_W)$

$$\Rightarrow \text{Punkt } W \text{ und } f''(x_W) = 0 = n(n-1)ax_W^{n-2} + (n-1)(n-2)bx_W^{n-3} + (n-2)(n-3)cx_W^{n-4} + \dots$$

Gegeben: Sattelpunkt $S(x_S|y_S)$

$\Rightarrow$ Punkt S und Extrempunkt S und Wendepunkt S

Gegeben: Steigung m bei x_m

$$\Rightarrow f'(x_m) = m$$